

高速領域積分方程式法を用いた半無限弾性波動場における 逆散乱解析手法の定式化について

東京理科大学 学生会員 ○日名子 卓也
東京理科大学 正会員 東平 光生

1 序論

近年著者らの研究グループでは、高速領域積分方程式法を用いた弾性波動場の逆散乱解析手法について開発・検討を行ってきた。この方法の特徴は、積分方程式を媒質の不均質領域と散乱波の関係を記述する方程式に変換し、それに Krylov 部分空間反復解法を適用する点にある。ところが、Krylov 部分空間反復解法を上記の方程式に適用すると解の収束特性が良好でないことが分かってきた¹⁾。本研究では、Tikhonov の正則化法を適用することで収束特性の改善を目指す。本論文ではこのための定式化を行う。

2 解析理論

逆散乱解析とは、半無限弾性波動場において観測された散乱波を既知とし、不均質領域の性状を推定することである。具体的な逆散乱解析手法は図 1 のように不均質領域

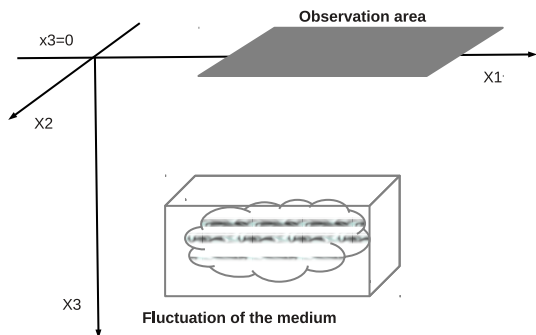


図 1: 逆散乱解析

をグリッドで囲み、そのグリッド数に応じた観測データの領域を決める。このグリッドの領域と観測データを用いて不均質領域の性状を推定する。ただし、観測データを地表面の領域 Ω_0 で得るものとする。以降の議論では特性関数 χ_{Ω_0} を用いる。この式は

$$\chi_{\Omega_0}(x) = \begin{cases} 1 & (x \in \Omega_0) \\ 0 & (x \notin \Omega_0) \end{cases} \quad (1)$$

である。また、逆散乱解析で用いる領域積分方程式は次の

ように表現できる。

$$\begin{aligned} v_i(\vec{x}) &= \mathcal{U}_{ij}^{-1} \hat{h}(\vec{\xi}) \mathcal{U}_{jk} M_{kl}(\vec{y}) q_l(\vec{y}) \\ q_l(\vec{y}) &= [\tilde{\lambda}(\vec{x}), \tilde{\mu}(\vec{x}), \tilde{\rho}(\vec{x})]^T \end{aligned} \quad (2)$$

ここに、 v_i は散乱波、 $\mathcal{U}_{ij}$ 、 $\mathcal{U}_{ij}^{-1}$ は一般化 Fourier 変換及び逆変換の演算子、 $\hat{h}$ は波数領域の Green 関数、 M_{kl} は入射波から構成される微分演算子、 q_l は媒質の不均質領域の状態ベクトルである¹⁾。ここで、式 (2) が第 1 種 Fredholm 積分方程式であり、その性質³⁾ から解の収束特性に良好でないことが考えられる。そこで、Krylov 部分空間反復解法の前処理として Tikhonov の正則化法を用いて式 (2) を正則化し、第 2 種 Fredholm 積分方程式に変形することを考える。いま、式 (2) において

$$A_{il} = \mathcal{U}_{ij}^{-1} \hat{h}(\vec{\xi}) \mathcal{U}_{jk} M_{kl}(\vec{y}) \quad (3)$$

とすると式 (2) は

$$v_i(\vec{x}) = A_{il} q_l(\vec{y}) \quad (4)$$

と表せる。

Tikhonov の正則化法とは演算子 A_{il} の共役演算子を用いて式 (2) を第 2 種 Fredholm 積分方程式に変形する。すなわち、式 (2) に Tikhonov の正則化法を適用すると次式となる。

$$A_{li}^* v_l(\vec{x}) = \alpha \delta_{il} q_l(\vec{y}) + A_{ki}^* A_{kl} q_l(\vec{y}) \quad (5)$$

ただし、

$$A_{li}^* = M_{ik}^*(\vec{y}) \mathcal{U}_{kj}^{-1} \hat{h}^*(\vec{\xi}) \Psi_{mj}^*(\vec{\xi}, 0) T_{mn} \mathcal{F}_{nl}^{(h)} \chi_{\Omega_0}(\vec{x})$$

である。ここに、演算子の肩につけた * は共役演算子であることを示す。また、 α は正則化パラメータ、 δ_{il} はクロネッカーのデルタ、 $\Psi_{mj}^*(\vec{\xi}, 0)$ は $x_3 = 0$ における固有関数、 T_{mn} は基底変換行列、 $\mathcal{F}_{nl}^{(h)}$ は水平方向の Fourier 変換である²⁾。

3 解析結果

ターゲットモデルを図 2 に示す。バックグラウンドの Lamé 定数を $\lambda = 4.0[\text{GPa}]$ 、 $\mu = 4.0[\text{GPa}]$ とする。また、

キーワード：弾性波解析、領域積分方程式、Tikhonov の正則化法、共役演算子、Krylov 部分空間反復解法

〒 278-8510 千葉県野田市山崎 2641 東京理科大学理工学部土木工学科 応用力学研究室 TEL:0471-24-1501(ex 4073)

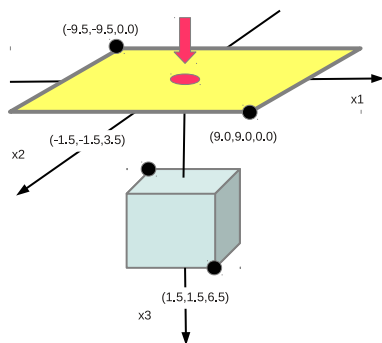


図 2: ターゲットモデル

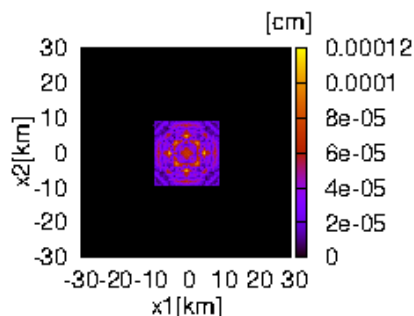
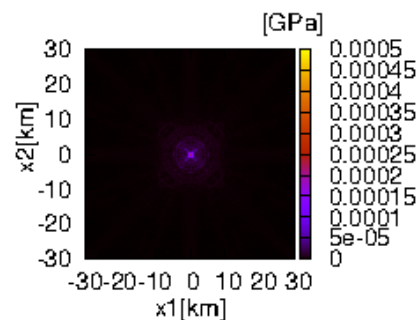
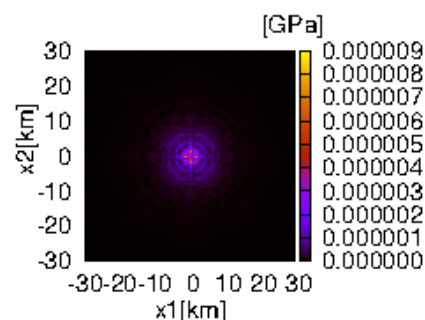


図 3: 観測データ

図 4: $x_3 = 0$ [km] (A^*v)図 5: $x_3 = 5$ [km] (A^*v)

ターゲットモデルの不均質領域は $\tilde{\lambda} = 0.3$ [GPa], $\tilde{\mu} = 0.3$ [GPa] とする。ここで、解析条件は加振力を 10×10^9 [N], 振動数を 1.0 [Hz], 質量密度は $\rho = 2.0 \times 10^3$ [kg/cm³] である。図 3 は散乱解析で求めた地表面上での散乱波である。ただし、この結果を観測データとして用いるために領域 Ω_0 の外側をゼロとしている。

本論文では観測データ v に共役演算子 A^* を掛け合わせた結果について示す。その結果のうち図 4 の $x_3 = 0$ [km] は地表面での解析結果となり、図 5 の $x_3 = 5$ [km] はターゲットモデルの不均質領域が存在する位置での解析結果となる。カラーレンジの単位が [cm] から [GPa] となるのは、共役演算子 A^* を掛けることにより不均質領域の性状の値となっているからである。図 5 によると、ターゲットの不均質領域の形状が再構成され始めていることが分かる。ただし、得られた結果の振幅は非常に小さい値である。

また、反復解法を適用させて解の収束状況を確認する必要がある。地表面の領域 Ω_0 の範囲を変更することにより解析結果が異なることから Ω_0 の範囲を検討する。さらに、正則化パラメータ α の検討も必要である。

4 結論

本論文では、半無限弾性波動場において Tikhonov の正則化法を適用して、領域積分方程式の定式化について論じた。共役演算子の数学的な導出が煩雑であったために、観測データに共役演算子を掛け合わせた解析結果となっている。ゆえに、Krylov 部分空間反復解法を適用して解の収束特性を確認する必要がある。

5 参考文献

- 1) Touhei, T., Takagishi, T., Wajima, Y., Kuranami, K., Inverse scattering analysis for an elastic half space based on a fast volume integral equation method. BOUNDARY ELEMENTS AND OTHER MESH REDUCTION METHODS XXXII, pp.111-119, 2010.
- 2) Touhei, T., A fast volume integral equation method for elastic wave propagation in a half space. International Journal of Solids and Structures, 2011.
- 3) Colton, D., Kress, R., Invers Acoustic and Electromagnetic Scattering Theory. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1998.