

2次元異方性弾性波動問題に対する 演算子積分時間領域境界要素法の開発

○群馬大学大学院 正会員 斎藤隆泰
東京工業大学大学院 学生会員 古川陽
東京工業大学大学院 学生会員 田中遊雲
東京工業大学大学院 正会員 廣瀬壮一

1. はじめに

境界要素法は、無限・半無限領域を容易に扱うことができるため、波動解析に有効な数値解析手法として知られている。しかしながら、異方性弾性波動解析に対する時間領域境界要素法は、定式化が極めて複雑であり多大な計算時間を必要とすること、時間領域境界要素法の特長上、時に数値解が不安定となること等が要因で、これまであまり行われていない。著者らは、これらの欠点を克服する方法について現在研究段階にあり、先ず3次元異方性弾性波動問題に対する演算子積分時間領域境界要素法を開発した¹⁾。本研究では、2次元異方性弾性波動問題に対して演算子積分時間領域境界要素法を開発し、その有効性について検討する。

2. 演算子積分時間領域境界要素法の定式化

以下では、特に断りのない限り、ローマ字で表示される添え字は1,2,3の値をとり、ギリシャ文字で表示される添え字は1,2の値をとる。また、添え字に関しては総和規約を適用する。なお、異方性弾性波動問題に対する構成方程式や支配方程式等の詳細については、文献²⁾等を参照されたい。領域を V 、境界を S とする均質で異方性を有する線形弾性体と考え、変位に関する以下の境界積分方程式が成り立つ。

$$C_{ij}u_j(\mathbf{x}, t) = u_i^{\text{in}}(\mathbf{x}, t) + \int_S U_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) * t_j(\mathbf{y}, t) dS(\mathbf{y}) - \int_S T_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) * u_j(\mathbf{y}, t) dS(\mathbf{y}) \quad (1)$$

ただし C_{ij} は自由項であり、 $*$ は時間に関する畳込み積分を表す。 $u_i(\mathbf{x}, t)$ 、 $u_i^{\text{in}}(\mathbf{x}, t)$ は、全変位および入射波の変位を表し、 $t_i(\mathbf{x}, t)$ は変位に対応する表面力を表す。また $U_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)$ 、 $T_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)$ は、2次元異方性弾性波動問題における時間領域基本解および対応する二重層核を表す。なお、 $\mathbf{y}$ はソース点を表す。通常の時間領域境界要素法では、時間・空間に関して適切な近似基底を導入し、境界 S に対して離散化することで境界上の変位や表面力といった未知量を求めることとなるが、時間増分が小さい場合は数値解が不安定になりやすい。そこで、時間に関しては畳込み積分を安定に計算できる演算子積分法を用いて離散化する。関数 $f(t)$ 、 $g(t)$ の畳込み積分 $f(t) * g(t)$ は演算子積分法を用い

ば次のように離散化近似できる。

$$f(n\Delta t) * g(n\Delta t) \simeq \sum_{k=0}^n \omega_{n-k}(\Delta t) g(k\Delta t) \quad (2)$$

$$\text{ただし, } \omega_m(\Delta t) \simeq \frac{\mathcal{R}^{-m}}{L} \sum_{l=0}^{L-1} \hat{f}\left(\frac{\gamma(z_l)}{\Delta t}\right) e^{-2\pi i \frac{ml}{L}} \quad (3)$$

ここで、 Δt は時間増分、 i は虚数単位、 $\hat{f}$ は関数 f のLaplace変換を表し、関数 $\gamma(z_l)$ は線形多段法における生成多項式の商、複素数 z_l は $z_l = \mathcal{R}e^{2\pi i l/L}$ で表される。また、 $\mathcal{R}$ 、 L は演算子積分法のパラメータであり、目標とする精度 ϵ を用いて $\mathcal{R} = \epsilon^{1/2L}$ で与える。式(1)に対して、 $\mathbf{x} \in S$ とし、時間に関しては演算子積分法、空間に関しては境界 S を N_n 個の要素に分割し、選点法を用いて離散化する。このとき、空間に関する形状関数を区間一定の関数で与えると、次式を得る。

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}u_i(\mathbf{x}, n\Delta t) &= u_i^{\text{in}}(\mathbf{x}, n\Delta t) \\ &+ \sum_{k=1}^n \sum_{\alpha=1}^{N_n} [A_{ij}^{n-k}(\mathbf{x}, \mathbf{y}^\alpha) t_j^\alpha(k\Delta t) \\ &- B_{ij}^{n-k}(\mathbf{x}, \mathbf{y}^\alpha) u_j^\alpha(k\Delta t)], \mathbf{x} \in S \end{aligned} \quad (4)$$

ここに、 $\mathbf{y}^\alpha$ は α 番目の要素における選点の座標を表す。また、 $A_{ij}^m(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ 、 $B_{ij}^m(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ は影響関数であり、例えば $A_{ij}^m(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ の場合、次式で表現される。

$$A_{ij}^m(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\mathcal{R}^{-m}}{L} \sum_{l=0}^{L-1} \left[\int_S \hat{U}_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, s_l) dS(\mathbf{y}) \right] e^{-2\pi i \frac{ml}{L}} \quad (5)$$

ここに、 s はLaplaceパラメータであり、 $s_l = \gamma(z_l)/\Delta t$ で表される。また、 $\hat{U}_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, s)$ は2次元異方性弾性波動問題に対するLaplace像空間における基本解を表す。なお、 $B_{ij}^m(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ については、積分核である $\hat{U}_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, s)$ を後に示す二重層核 $\hat{T}_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, s)$ に置換えれば良い。2次元異方性弾性波動問題のLaplace像空間における基本解は、WangとAchenbachによる時間領域基本解³⁾を直接Laplace変換することで求めることができる。2次元異方性弾性波動問題のLaplace像空間における基本解 $\hat{U}_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, s)$ は、等方性弾性波動問題と同様に、静的部分 $\hat{U}_{ij}^S(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ と動的部分 $\hat{U}_{ij}^D(\mathbf{x}, \mathbf{y}, s)$ に分離することが可能であり、次のように表される。

$$\hat{U}_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, s) = \hat{U}_{ij}^S(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \hat{U}_{ij}^D(\mathbf{x}, \mathbf{y}, s) \quad (6)$$

$$\hat{U}_{ij}^S(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -\frac{1}{4\pi^2} \int_{|\mathbf{n}|=1} \Gamma_{ij}^{-1}(\mathbf{n}) \ln |\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}| d\mathbf{n} \quad (7)$$

$$\hat{U}_{ij}^D(\mathbf{x}, \mathbf{y}, s) = \frac{1}{8\pi^2} \int_{|\mathbf{n}|=1} \sum_{m=1}^M \frac{d_{im}d_{jm}}{\rho c_m^2} L_m^D d\mathbf{n} \quad (8)$$

ここに, $\mathbf{r} = |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$ であり, ρ は密度, Γ_{ij} は Christoffel テンソルを表す. ただし, 式 (7), (8) は単位円周上の方向ベクトル $\mathbf{n}$ に関する積分となっていることに注意する. また, 式 (8) の動的部分は異方性材料で現れる速度 c_m , 偏方向 d_{im} で伝搬する異なる 3 つの波動を表現している. 一方, 関数 L_m^D は次式で与えられる.

$$L_m^D = 2 \ln |\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}| + e^{s \frac{|\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}|}{c_m}} E_1 \left(s \frac{|\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}|}{c_m} \right) + e^{-s \frac{|\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}|}{c_m}} \left[E_1 \left(-s \frac{|\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}|}{c_m} \right) + i\pi \right] \quad (9)$$

ここに $E_1(z)$ は指数積分を表す. また, 基本解に対応する二重層核 $\hat{T}_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, s)$ は次のように求めることができる.

$$\hat{T}_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, s) = C_{ikpq} \hat{U}_{pj,q}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, s) n_k^\alpha \quad (10)$$

ただし, n_k^α は境界要素上の外向き法線ベクトルを表す. 式 (7), (8) より, 異方性弾性波動問題の基本解は閉じた形式で表現できないことがわかる.

3. 数値解析例

数値解析例を示す. 解析モデルとして図 1 中央上に示すような無限弾性体中に存在する半径 a の空洞による入射波の散乱問題を考える. 以下の解析では, 演算子積分法で用いる目標とする精度 ϵ は $\epsilon = 1.0 \times 10^{-10}$ とし, 生成多項式の商 $\gamma(z)$ は 1 次の後退差分公式で与えた. なお, 空洞は 32 個の一定要素に分割した.

(1) 精度の確認

当然のことながら, 例えば式 (10) の弾性定数に等方性材料に対するパラメータを与えれば, 解析結果は等方性弾性波動問題における場合に一致する. このことを利用し, 計算精度の確認を行う. 入射波 $u_i^{\text{in}}(\mathbf{x}, t)$ は x_1 軸を正の方向に伝搬する平面 P 波とし, 以下に示す単調増加関数で与えた.

$$u_i^{\text{in}}(\mathbf{x}, t) = U_0 d_i \left(\frac{c_L t}{a} - \frac{x_1 + a}{a} \right) H \left(\frac{c_L t}{a} - \frac{x_1 + a}{a} \right) \quad (11)$$

ここに, U_0 は入射波の振幅, c_L は P 波速度, d_i は入射波の振動方向であり $\mathbf{d} = [1, 0]^T$ で与えた. また, 時間増分は $c_L \Delta t / a = 0.125$ とし, 総時間ステップ数は $N = L = 128$ とした. 図 1 に本手法による数値解 (丸印) と, Pao と Mow による周波数領域解析解⁴⁾ を逆フーリエ変換して求めた結果 (実線) を示す. 両者は良く一致しており, 本手法の計算精度を確認できた.

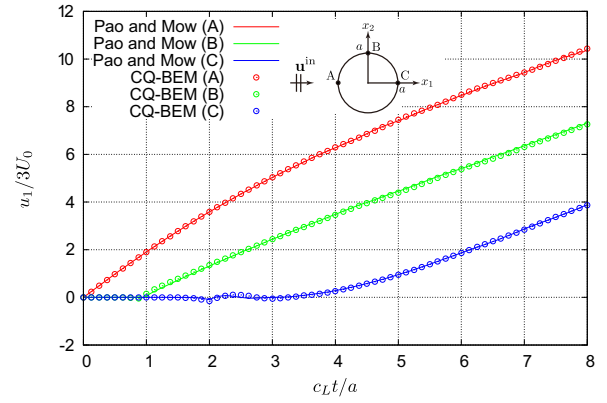


図 1 点 A, B, C における x_1 方向変位の時刻歴.

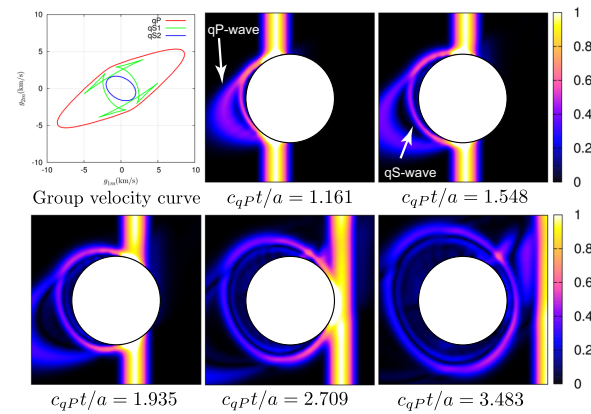


図 2 グラファイトエポキシ中の空洞による散乱波動場と群速度曲線 ($x_1 - x_2$ 平面).

(2) 異方性弾性波動解析

次に, 図 2 にグラファイトエポキシ中の空洞による散乱波動解析を行った結果を示す. なお, 図 2 左上にグラファイトエポキシに対する群速度曲線を示している. ただし, 入射波は速度 c_{qP} を持つ平面疑似 P 波とし, 時間増分を $c_{qP} \Delta t / a = 0.129$ で与えた. 群速度曲線にならい, 散乱疑似 P 波や S 波が発生していることを確認できる.

4. おわりに

異方性弾性波動問題に対する 2 次元演算子積分時間領域境界要素法を開発した. 計算精度を確認した後, グラファイトエポキシ中の空洞による散乱波動解析を行った. 演算子積分法を用いたことにより, 数値解の安定性は保証されるものの, 依然として解析には多くの計算時間を必要とする. 今後は様々な異方性材料に対して本手法を適用すると共に, 計算効率を改善する方法についても検討する予定である.

参考文献

- 1) 斎藤隆泰, 田中遊雲, 廣瀬壮一: 3 次元異方弾性波動問題における Lubich の方法を用いた時間領域境界要素法, 計算数理工学論文集, Vol.10, No.20-101210, pp.111-116, 2010.
- 2) Gaul, L., Kögl, M. and Wagner, M.: Boundary Element Methods for Engineers and Scientists, Springer, (2003).
- 3) Wang, C.-Y. and Achenbach, J.D.: Elastodynamic fundamental solutions for anisotropic solids, *Geophys. J. Int.*, Vol.118, pp.384-392, 1994.
- 4) Pao, Y.-H. and Mow, C.C.: *Diffraction of Elastic Waves and Dynamic Stress Concentrations*, Crane and Russak, New York, 1973.