

修正伝達マトリックス法による多層版の数値解析

金沢大学大学院自然科学研究科 正会員 ○横山 広 , 梶谷 浩
 東京都土木技術支援・人材育成センター 正会員 関口 幹夫
 国土開発センター技術開発研究所 正会員 亀田 浩昭, 堀川 都志雄

1. はじめに

弾性定数の異なる板が層状をなす多層版の3次元問題の級数解法には, ①界面での伝達力を未知量とする応力法, ②界面の変位を未知量とする変位法, および③界面での変位と伝達力で表される状態量を未知量とする伝達マトリックス法が挙げられる. 園田・堀川ら¹⁾は変位関数に基づく厚板理論から導かれる応力法を用いて数値解析を行うと共に, 中村²⁾の提案した伝達マトリックスの改良手法を拡張して, 任意の界面での状態量を最上面と最下面での境界条件に直接結びつける修正伝達マトリックス法(以下, INSERT法という)を開発し, 全層数が n であっても未知量の数が6つに限定されることを示した.

本研究では表面力を受ける多層版の変位や応力について, 開発したINSERT法に対して応力法, ならびに変位法による計算結果と比較し, 解析手法としての有効性を評価する.

2. INSERT法の概要

厚板理論から導かれる応力法や変位法を用いて, Fourier級数の各項 m, n に対して格点 i の状態量 $\{U, X, 1\}_i^T$ と格点 $(i+1)$ の状態量 $\{U, X, 1\}_{i+1}^T$ との関係を以下にまとめる. なお上添字 T は転置を意味する.

右側の格点 $i+1$ から左側格点 i へ伝達する場合を式(1)とする.

$$\begin{Bmatrix} U \\ X \\ 1 \end{Bmatrix}_i = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U \\ X \\ 1 \end{Bmatrix}_{i+1} = [f_i] \begin{Bmatrix} U \\ X \\ 1 \end{Bmatrix}_{i+1} \quad (1)$$

ここに, $[f_i]$: 格間 i のフィールドマトリックス

$$U = \{u, v, w\}^T, \quad X = \{X, Y, Z\}^T$$

同様にして, 左側格点 i から右側格点 $i+1$ への伝達は次のようになる.

$$\begin{Bmatrix} U \\ X \\ 1 \end{Bmatrix}_{i+1} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U \\ X \\ 1 \end{Bmatrix}_i = [g_i] \begin{Bmatrix} U \\ X \\ 1 \end{Bmatrix}_i \quad (2)$$

ここに, $[g_i]$: 格間 i のフィールドマトリックス

例えば式(1)と(2)を5層からなる多層版モデル(4つの界面は格点2~5に対応する)に適用すれば, INSERT法による格点3の状態量は式(3)および(4)のように示される.

$$\begin{Bmatrix} U \\ X \\ 1 \end{Bmatrix}_1 = [f_1][f_2] \begin{Bmatrix} U \\ X \\ 1 \end{Bmatrix}_3 = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_2 \begin{Bmatrix} U \\ X \\ 1 \end{Bmatrix}_3 \quad (3)$$

$$\begin{Bmatrix} U \\ X \\ 1 \end{Bmatrix}_6 = [g_5][g_4][g_3] \begin{Bmatrix} U \\ X \\ 1 \end{Bmatrix}_3 = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_3 \begin{Bmatrix} U \\ X \\ 1 \end{Bmatrix}_3 \quad (4)$$

多層版の最上面(番号1)と最下面(番号6)で応力規定される境界条件の下で, 未知量 U_3 と X_3 は以下の式を解くことにより決定される.

キーワード INSERT法, 厚板理論, 応力法, 変位法, 多層版

連絡先 連絡先 〒924-0838 石川県白山市八束穂3丁目7番地 TEL 076-274-8816

$$\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{21} & s_{22} \\ t_{21} & t_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_3 \\ X_3 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} s_{13} \\ s_{23} \end{Bmatrix} \quad (5)$$

以上の操作を格点 2～5 まで順次行えば、全格点の状態量が求められる。さらにこの状態量から各層の変位と応力が得られる。

3. 数値計算例

INSERT 法の計算例として辺長が a の多層からなる正方形版に着目する。版厚は $a/10$ とし支持条件は全周単純支持とした。計算に用いたヤング係数は $E=1.0$ でポアソン比を $\nu=0.3$ とし、等分布荷重 q と載荷範囲が $a/100$ の部分荷重 P を版中央に載荷した場合の計算を行った。版の各層の厚さは版厚を層数で除した等厚である。なお、本計算では項数を 100 とした級数解法によって値を得ているが、それぞれの計算方法で値が収束したことを確認している。

計算結果を表-1 から表-4 に示す。表中の着色部分は各計算方法における層数 10 層の計算結果に対して 1.0%以上の差が生じた値である。また、表中に値が無いものは計算結果が層厚方向に不連続となったものを示している。等分布荷重の計算結果である表-1 と表-2 によれば、INSERT 法が 60 層まで精度が確保されているのに対し、応力法では 10 層、変位法が 20 層までとなっている。また、応力法では 40 層以上になると厚さ方向に値が連続しない結果となった。次に部分荷重とした表-3 と表-4 によれば、応力法で誤差が大きく、10 層でも版下端の応力値が他の計算法に対して差が生じており、変位法では等分布荷重と同様に 20 層までは精度が確保されている。以上の結果、層数が多くなれば INSERT 法による計算が有利になること、応力法では等分布荷重で、変位法では部分荷重が相性が良いことが判った。因みに計算に要する時間は、30 層の場合で応力法が INSERT 法の約 16 倍、変位法では約 20 倍を必要としていた。

4. おわりに

道路橋床部分は一般に舗装と床版から構成される 2 層構造である。しかし、劣化床版に対する補強工法として炭素繊維シートを橋軸方向、橋軸直角方向に各 2 層接着した場合には、シート層と樹脂層を含めて 10 層の多層構造となる。INSERT 法では精度良くそれらの多層構造の計算が可能となるので、今後の維持管理における補強構造の評価に有効な手段であると考えられる。また、床版本体を多層分割してひび割れ状態をヤング係数の大小で表現すれば、さらに詳細な床版構造の評価が可能となる。

参考文献

- 1) 園田恵一郎, 堀川都志雄, 白鳥良一: 3 次元弾性問題に対する伝達マトリックス級数解法の適用, 土木学会論文報告集, No.339, 昭和 58 年, pp.41-50
- 2) 中村秀治: 数値誤差の改善を考慮した伝達マトリックス法の提案, 土木学会論文報告集, No.289, 昭和 54 年, pp.43-53.

表-1 たわみの計算結果 (等分布荷重)

層数	INSERT法		応力法		変位法	
	w^u	w^l	w^u	w^l	w^u	w^l
10	46.01	45.96	46.01	45.95	45.84	45.79
20	46.15	45.96	45.95	45.43	46.12	46.07
30	45.72	45.87	45.31	43.70	45.19	45.14
40	46.61	45.76	-	-	50.33	50.28
50	47.05	45.61	-	-	42.67	42.63
60	48.96	45.65	-	-	48.33	48.29
80	44.94	44.97	-	-	50.12	50.07
単位: qa^4/Eh^3						

表-2 直応力の計算結果 (等分布荷重)

層数	INSERT法		応力法		変位法	
	σ_x^u	σ_x^l	σ_x^u	σ_x^l	σ_x^u	σ_x^l
10	-29.00	28.86	-29.00	28.86	-28.89	28.75
20	-29.01	28.86	-28.94	28.81	-29.08	28.94
30	-29.00	28.86	-28.71	28.67	-28.46	28.31
40	-29.01	28.86	-	-	-31.93	31.79
50	-29.02	28.86	-	-	-26.74	26.60
60	-29.04	28.86	-	-	-30.54	30.40
80	-28.99	28.85	-	-	-31.75	31.61
ここで, $\sigma_x = \sigma_y$ 単位: q						

表-3 たわみの計算結果 (部分荷重)

層数	INSERT法		応力法		変位法	
	w^u	w^l	w^u	w^l	w^u	w^l
10	21.52	13.56	21.49	13.46	21.44	13.52
20	21.52	13.56	21.70	13.20	21.51	13.59
30	21.40	13.56	21.80	12.69	21.28	13.35
40	21.70	13.53	-	-	22.55	14.63
50	21.67	13.54	-	-	20.66	12.74
単位: Pa^2/Eh^3						

表-4 直応力の計算結果 (部分荷重)

層数	INSERT法		応力法		変位法	
	σ_x^u	σ_x^l	σ_x^u	σ_x^l	σ_x^u	σ_x^l
10	-623.4	20.5	-626.6	19.2	-623.4	20.5
20	-623.4	20.5	-624.9	17.8	-623.4	20.5
30	-623.4	20.5	-669.9	16.9	-623.3	20.3
40	-623.4	20.5	-	-	-624.1	21.2
50	-623.4	20.5	-	-	-622.9	19.9
ここで, $\sigma_x = \sigma_y$ 単位: P/a^2						