

流体-固体連成問題に対する演算子積分 時間領域境界積分方程式の直接解法

○東京工業大学大学院 学生会員 丸山泰蔵
群馬大学大学院 正会員 斎藤隆泰
東京工業大学大学院 正会員 廣瀬壮一

1. はじめに

本研究では、流体-固体連成問題に対する演算子積分時間領域境界要素法について検討する。流体-固体連成問題を時間領域境界要素法を用いて直接解析する場合、流体-固体界面における境界条件をいかに適切に処理するかが重要となる。著者らはこれまでに演算子積分法の特性を活かし、像空間で境界条件、及び境界物理量を処理する手法¹⁾(以下、像空間法と呼ぶ)を提案してきたが、非線形問題への適用ができないことが課題となっていた。そこで、本研究ではNewmarkの β 法を用いて界面における境界条件を時間領域で離散化処理する手法を提案する。数値解析例として、界面による平面波の反射・透過問題を解析することで、本手法の妥当性、計算効率等を確認する。

2. 解くべき問題

図1のような流体領域 D^f と固体領域 D^s の連成問題を考える。このとき、入射波は流体領域 D^f から入射し、界面 S で反射・透過される問題とする。流体領域 D^f 、及び固体領域 D^s それぞれにおける圧力 p 、変位 u_i は物体力を無視すれば、次の支配方程式を満足する。

$$\nabla^2 p(\mathbf{x}, t) - \frac{1}{c_f^2} \ddot{p}(\mathbf{x}, t) = 0 : \mathbf{x} \in D^f \quad (1)$$

$$c_T^2 u_{i,jj}(\mathbf{x}, t) + (c_L^2 - c_T^2) u_{j,ji}(\mathbf{x}, t) = \ddot{u}_i(\mathbf{x}, t) : \mathbf{x} \in D^s \quad (2)$$

ここで、 t は時刻、 c_f は流体領域 D^f 中の波速、 c_L 、 c_T は固体領域 D^s 中における縦波、横波の波速を表している。また、 $(\dot{})$ は時間微分、 $()_{,i}$ は空間微分を表している。

3. 境界微積分方程式

流体領域 D^f と固体領域 D^s の界面での時間領域における境界条件を次に示す²⁾。

$$-\rho_f \ddot{u}_n(\mathbf{x}, t) = q(\mathbf{x}, t) \left(\equiv \frac{\partial p(\mathbf{x}, t)}{\partial n_x^f} \right) \quad (3)$$

$$t_\eta(\mathbf{x}, t) = -p(\mathbf{x}, t) \quad (4)$$

$$t_\xi(\mathbf{x}, t) = 0 \quad (5)$$

ここで、 ρ_f は流体の密度、 q は圧力勾配、 t_i は表面力、 $\partial/\partial n_x^f$ は点 $\mathbf{x}$ における法線方向微分を表している。界面 S に対する法線方向ベクトル $\mathbf{n}^f$ 、 $\mathbf{n}^s$ は流体領域 D^f 、固体領域 D^s

においてそれぞれ反対方向に定義している。また、下付添字の η, ξ はそれぞれ法線方向、接線方向を表している。

支配方程式(1),(2)から積分方程式を導出し、境界 S に対して極限操作を行うと境界積分方程式を得る。得られた境界積分方程式を連立して解くために、境界条件式(3)-(5)を代入すると次式を得る。

$$-C(\mathbf{x})t_\eta(\mathbf{x}, t) = p^{\text{in}}(\mathbf{x}, t) - \rho_f \int_S G(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) * \ddot{u}_\eta(\mathbf{y}, t) dS_y + \int_S H(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) * t_\eta(\mathbf{y}, t) dS_y \quad (6)$$

$$C_{ij}(\mathbf{x})u_j(\mathbf{x}, t) = \int_S U_{i\eta}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) * t_\eta(\mathbf{y}, t) dS_y - \int_S T_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) * u_j(\mathbf{y}, t) dS_y \quad (7)$$

ここで、 $C(\mathbf{x})$ 、 $C_{ij}(\mathbf{x})$ は境界形状に依存する自由項であり、 $*$ は畳込み積分を表している。また、 $G(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)$ 、 $H(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)$ は2次元スカラー波動問題における基本解、及び二重層核、 $U_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)$ 、 $T_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)$ は2次元弾性波動問題における基本解と二重層核であり、 p^{in} は入射波の圧力を表している。また、積分記号 f はコーシーの主値の意味で評価する。式(6)は積分のみではなく、変位 u_η の時間に関する二階微分項を含む。そのため、式(6),(7)をそのまま時間領域で直接連成することは困難である。そこで、本研究ではNewmarkの β 法を用いて、変位 u_η の時間に関する二階微分項を離散化することによって連成を行う。

4. 離散化

まず、演算子積分法を用いた畳込み積分の離散化について説明し、次に、Newmarkの β 法を用いた時間に関する微分項の離散化について説明する。

境界面 S を M 個の一定要素に分割し、演算子積分法を用いて、時間 t を時間増分 Δt を用いて N ステップに分割し、第 n ステップにおいて式(6),(7)を離散化すると次の式

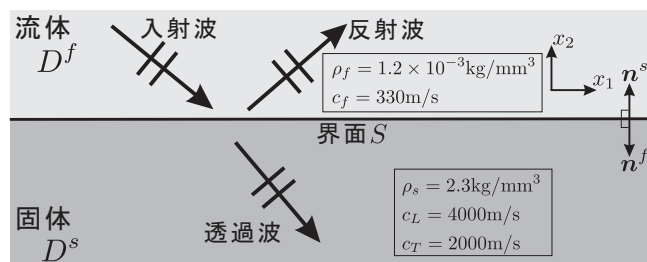


図1 流体-固体連成問題に対するモデル図

Key Words: 演算子積分法, 時間領域境界要素法, 流体-固体連成問題

〒152-8552 東京都目黒区大岡山 2-12-1-W8-22・TEL/FAX: 03-5734-3587

を得る.

$$-\frac{1}{2}t_{\eta}(\mathbf{x}, n\Delta t) = p^{\text{in}}(\mathbf{x}, n\Delta t) - \sum_{k=0}^n \sum_{\alpha=1}^M \left[\rho_f A^{n-k}(\mathbf{x}, \mathbf{y}^{\alpha}) \ddot{u}_{\eta}(\mathbf{y}^{\alpha}, k\Delta t) - B^{n-k}(\mathbf{x}, \mathbf{y}^{\alpha}) t_{\eta}(\mathbf{y}^{\alpha}, k\Delta t) \right] \quad (8)$$

$$\frac{1}{2}u_i(\mathbf{x}, n\Delta t) = \sum_{k=0}^n \sum_{\alpha=1}^M \left[D_{i\eta}^{n-k}(\mathbf{x}, \mathbf{y}^{\alpha}) t_{\eta}(\mathbf{y}^{\alpha}, k\Delta t) - E_{ij}^{n-k}(\mathbf{x}, \mathbf{y}^{\alpha}) u_j(\mathbf{y}^{\alpha}, k\Delta t) \right] \quad (9)$$

ここで, $A^m(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, $B^m(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, 及び $D_{ij}^m(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, $E_{ij}^m(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ はそれぞれ流体領域, 及び固体領域の影響関数¹⁾である. また, このとき境界は滑らかであるとしている.

Newmark の β 法によると変位 u_{η} の時間に関する二階微分項 $\ddot{u}_{\eta}$ は次のように表すことができる.

$$\ddot{u}_{\eta}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{\beta \Delta t^2} \left\{ u_{\eta}(\mathbf{x}, t) - u_{\eta}(\mathbf{x}, t - \Delta t) - \Delta t \dot{u}_{\eta}(\mathbf{x}, t - \Delta t) - \left(\frac{1}{2} - \beta \right) \Delta t^2 \ddot{u}_{\eta}(\mathbf{x}, t - \Delta t) \right\} \quad (10)$$

式 (10) 右辺には $\dot{u}_{\eta}$ が含まれているが, $\dot{u}_{\eta}$ は

$$\dot{u}_{\eta}(\mathbf{x}, t) = \frac{\gamma}{\beta \Delta t} \left\{ u_{\eta}(\mathbf{x}, t) - u_{\eta}(\mathbf{x}, t - \Delta t) + \left(\frac{\beta}{\gamma} - 1 \right) \Delta t \dot{u}_{\eta}(\mathbf{x}, t - \Delta t) + \left(\frac{\beta}{\gamma} - \frac{1}{2} \right) \Delta t^2 \ddot{u}_{\eta}(\mathbf{x}, t - \Delta t) \right\} \quad (11)$$

と表現でき, 毎時間ステップごとに計算することが可能である. ここで, γ, β は Newmark の β 法のパラメータであり, γ は通常 $1/2$, β は $1/4$ を選択すると平均加速度法, $1/6$ を選択すると線形加速度法となる. 式 (10), (11) を用いることにより, 式 (8), (9) は直接連成して解くことが可能である.

5. 数値解析例

図2中左上に示されるような流体-固体-流体の三層から成る解析モデルに対して, 上部流体領域から平面波を垂直入射させる反射・透過問題を解析した. 入射波として, 次に示す正弦波を用いた.

$$p^{\text{in}}(\mathbf{x}, t) = \begin{cases} p_0 \sin \alpha & (0 \leq \alpha \leq 2\pi) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases} \quad (12)$$

$$\alpha = 2\pi(t - (\mathbf{p} \cdot \mathbf{x})/c_f)/T \quad (13)$$

ただし, 時刻 $t = 0\mu\text{s}$ に, 平面圧力波が上部界面に到達するようにしている. p_0 は入射波の振幅, $\mathbf{p}$ は入射波の進行方向単位ベクトルを表している. また, T は入射波の周期で, 本解析では $2.5\mu\text{s}$ (周波数 400kHz) で与えた. それぞれの領域における材料定数は流体として空気, 固体としてモルタ

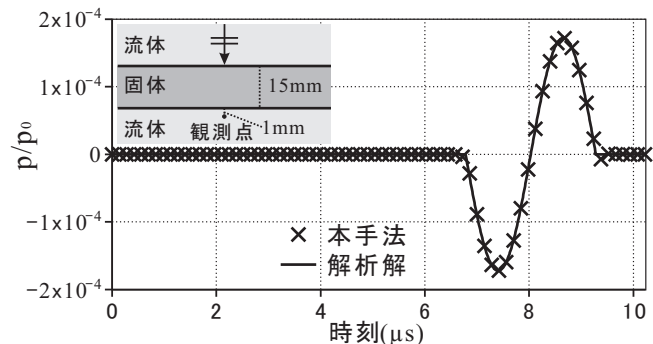


図2 流体-固体-流体の三層モデルへの垂直入射による透過圧力

表1 計算手法による違い

	必要記憶容量 (GB)	計算時間 (sec)	非線形問題 (○ or ×)
本手法:	72.1	31273	○
像空間法 ¹⁾ :	0.244	725	×

ルを想定した図1中に示す値を用いた. また, 境界要素は解析に十分な長さで打ち切って計算を行った. 図2は下部流体領域における界面から下部1mmの内点での無次元化された圧力 p/p_0 をプロットしている. 解析解は音響インピーダンスから解析的に求めることができ, 比較のため実線で示している. 図2より, 両者は良く一致していることが確認できる. また, 本解析において Newmark の β 法のパラメータは $\gamma = 1/2$, $\beta = 1/4$ とした.

演算子積分法の特性を活かし, 境界条件, 及び境界物理量を像空間表現することにより連成を行った像空間法¹⁾と本手法の必要記憶容量, 計算時間などを比較する. 計算パラメータは要素数 $M = 1000$, 総時間ステップ数 $N = 1024$ とし, いずれも, OpenMP による並列化を施し, 24 スレッドで計算を行っている. 表1にそれぞれの手法の必要記憶容量, 計算時間, 非線形問題への適用可否を示す. 表1より, 必要記憶容量, 計算時間は像空間法の方が良いことがわかる. 本手法では時間ステップ毎にその時間ステップ以前の境界データを全て利用した行列ベクトル積の演算を必要とするが, 像空間法では必要としないことが大きく寄与している. しかし, 本手法は時間領域で直接計算を行うため, 非線形問題への適用が可能であるというメリットがある.

6. 結論と今後の課題

流体-固体連成問題に対する演算子積分時間領域境界積分方程式の直接解法の開発を行った. 数値解析により, 本手法の妥当性を確認した. また, 像空間法との計算効率の比較を行った.

今後は, 3次元解析への拡張を行う予定である.

参考文献

- 1) 斎藤隆泰, 丸山泰蔵, 廣瀬壮一: 流体-固体連成問題のための演算子積分時間領域境界要素法および空気超音波シミュレーションへの応用, 応用力学論文集 Vol.14, pp.145-152, 2011.
- 2) 廣瀬壮一, 北原道弘: 液体-固体の境界近傍における欠陥による散乱, 境界要素法研究会境界要素法論文集第8巻, pp.63-68, 1991.