

三次元混合ハイブリッド FEM に関する基礎的検討

北海道大学大学院工学院 学生員 ○小松 駿也
北海道大学大学院工学研究院 フェロー 蟹江 俊仁

1. 研究背景

混合ハイブリッド FEM(MHF)とは、目的変数を要素の節点に与え非退化形式の支配方程式を用いて離散化を行う従来の有限要素法(FEM)と異なり、目的変数を要素の境界面に与え混合形式の支配方程式を用いて離散化を行うというものである。混合形式の支配方程式を用いることで目的変数の微分値が新たな目的変数として定義される。さらに本来の目的変数を要素内で一定値として補間し、新たな目的変数を要素内部で線形に補間することで境界部において連続性が確保され、新たな目的変数について高い精度を得ることができる。そのため MHF は本来の目的変数よりもその微分値のほうが重要視されるような問題、例えば速度ポテンシャルで表記された水の流動解析や応力解析、電磁場解析といった問題に有効だといえる。本研究の目的は一般的な FEM と MHF の違いを基礎的な二次元の Laplace 方程式を三次元に拡張して確認することである。

2. 混合形式の支配方程式

MHF では目的変数の微分値もまた目的変数として与える、式(2-1)、式(2-2)のような混合形式の支配方程式を用いて離散化を行う。このように目的変数の微分値が新たな目的変数として定義されている。

$$k \nabla \Phi = -\vec{q} \quad \text{式(2-1)}$$

$$\nabla \vec{q} = 0 \quad \text{式(2-2)}$$

式(2-1)はダルシー則を、式(2-2)は非圧縮流体における質量保存則を表している。

3. 三次元解析モデル

図-1 に示すように ξ, η, ζ 軸を設定した三次元モデルを考える。FEM では目的変数である速度ポテンシャル ϕ を節点に与え、MHF では目的変数 ϕ 、さらに要素からの流出方向を正と定義した流量を境界面上に定義する。定式化を行うモデルについては簡単のため各辺長を 2 とし、原点を要素の中心に設定した

立方体要素を考える。

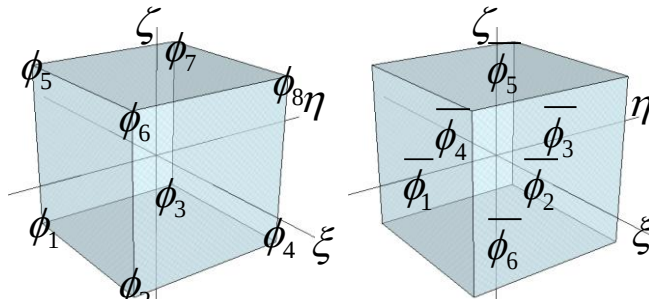


図-1-1 FEM 要素モデル 図-1-2 MHF 要素モデル

図-1 三次元解析モデル

4. Raviart-Thomas 型形状関数

FEM では一般的な形状関数を用いるのに対し、MHF では Raviart-Thomas 型形状関数というベクトルをもった形状関数を用いる。スカラーである流量にベクトルをもった形状関数と要素内部における任意点の座標を与えることで、面で定義された流量から任意点における流速ベクトルを表現することができる。さらに形状関数の各値を境界面の面積で除すことによって単位面積あたりの流速ベクトルを表現することができるという特徴がある。式(4-1)は立方体モデルにおける Raviart-Thomas 型形状関数の例である。

$$\begin{aligned} \left[\vec{N}(\xi, \eta, \zeta) \right] &= \begin{bmatrix} N_{1,\xi} & N_{2,\xi} & N_{3,\xi} & N_{4,\xi} & N_{5,\xi} & N_{6,\xi} \\ N_{1,\eta} & N_{2,\eta} & N_{3,\eta} & N_{4,\eta} & N_{5,\eta} & N_{6,\eta} \\ N_{1,\zeta} & N_{2,\zeta} & N_{3,\zeta} & N_{4,\zeta} & N_{5,\zeta} & N_{6,\zeta} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{8}(\xi+1) & 0 & \frac{1}{8}(\xi-1) & 0 & 0 \\ \frac{1}{8}(\eta-1) & 0 & \frac{1}{8}(\eta+1) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{8}(\zeta+1) & \frac{1}{8}(\zeta-1) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad \text{式(4-1)}$$

このような形状関数を用いて式(2-1)のダルシー則の離散化を行う。重み関数を与え要素全体で積分を行うと

$$\int_{\Omega_k} (k \nabla \Phi + \vec{q}) \delta \vec{W} d\Omega_k = 0 \quad \text{式(4-2)}$$

キーワード MHF, Raviart-Thomas 型形状関数, 混合形式

連絡先 〒060-8628 北海道札幌市北区北 13 条西 8 丁目 北海道大学大学院工学院 TEL090-7648-9216

要素内における速度ポテンシャル ϕ は一定値として与えられるところが大きな特徴である。式(4-2)に Green の定理を適用すると

$$\oint_{S_k} k \phi \delta \vec{W} n dS_k - \int_{\Omega_k} k \Phi \nabla \delta \vec{W} d\Omega_k + \int_{\Omega_k} \vec{q} \delta \vec{W} d\Omega_k = 0$$

式(4-3)

左辺第一項は Green の定理により出現した周辺積分(ここでは周面積分となる)により、境界面全体を代表する速度ポテンシャルとして表現することができる。さらに要素からの流出方向を正と定義された式(2-2)の質量保存則と組み合わせることで定式化することができる。

5. 解析結果

図のように透水係数の著しく異なる不透水層を設け、地下水を想定した流動解析を行った。両手法を比較すると、MHF は不透水層に流入する流速ベクトルが少ないことがわかる。これは FEM が節点に目的変数を与え、まわりの要素の影響を受ける一方、MHF では流速ベクトルに沿った面における流量のみから流速ベクトルを算出するため、各成分における値の精度が高くなっているためである。

また、図-3 と図-4 はそれぞれ FEM と MHF の解の収束の様子を表しており、FEM は収束値に対して小さな値から、MHF は収束値に対して大きな値から収束しているということがわかる。これは全目的変数の数と不透水層に関する目的変数の数との比に関係しており、FEM に比べ MHF では不透水層に関する目的変数の数の割合は全目的変数の数に対して少ない、つまり不透水層の影響が比較的小さいため、流速は過大評価される。その比は図-5 に示すように分割数が増えたとある一定値に収束する。MHF は FEM に比べ、少ない分割数でこの収束値に収束することから、少ない分割数でも高い精度が得られるということに加え、解の妥当性もあると言える。

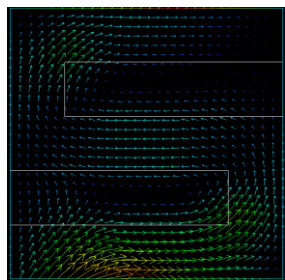


図-2-1 FEM 解析

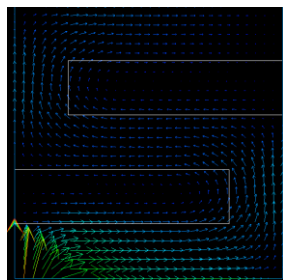


図-2-2 MHF 解析

図-2 解析結果の比較図

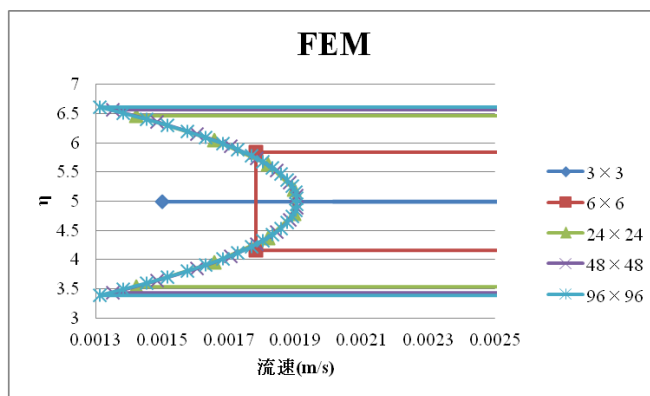


図-3 解の収束の様子(FEM)

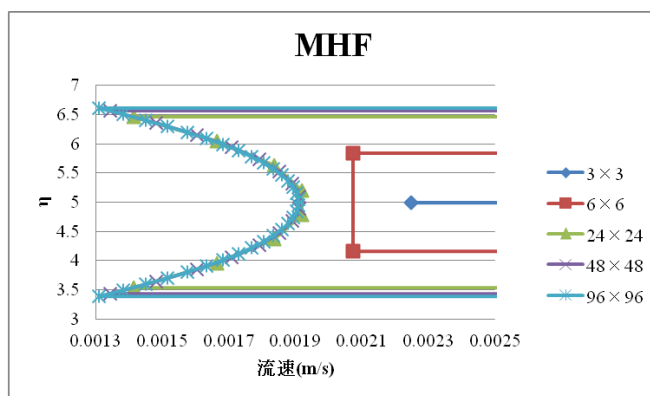


図-4 解の収束の様子(MHF)

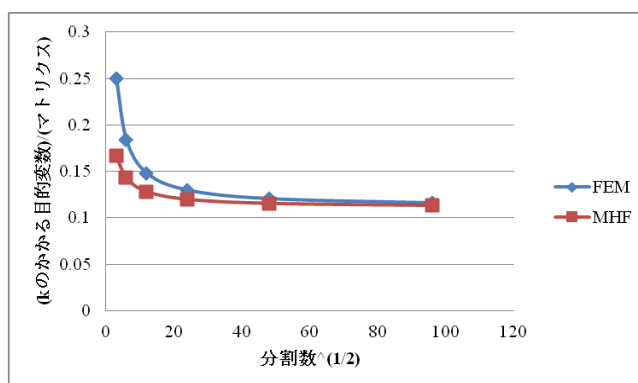


図-5 (透水係数のかかる目的変数)/(マトリクス)

6. まとめ

上述したように、目的変数の微分値が重要視されるような問題において MHF が有効だといえるということがわかった。また、MHF を用いることで要素間の連続性が保障されるので、特に条件が著しく異なるような境界において高い精度が確認できた。

参考文献

- 1) 土屋健司:混合ハイブリッド有限要素法の基礎的特性に関する検討, 北海道大学環境社会工学科平成 22 年度修士論文, pp.3-47, 2010