

2次元スカラー波動問題のための wavelet 時間域境界要素法の計算効率に対する境界条件の影響

新潟大学 学生員 菅波祐太
新潟大学 正会員 紅霧一寛
新潟大学 正会員 阿部和久

1. はじめに

境界要素法 (BEM) を高速化・効率化する手法の一つに、境界積分方程式の離散化に wavelet 基底を用い、係数行列のスパース化により使用メモリと計算量の削減を図る wavelet BEM^{(1),(2),(3)}がある。Wavelet BEM の適用による境界要素解析の効率化は、これまで専ら Laplace 問題を対象としてきた⁽²⁾が、近年では非定常問題を対象とした時間域境界要素法への適用も試みられている。特に、2次元スカラー波動問題においては、Haar wavelet 及び区間一定非直交スプライン wavelet を適用した場合における計算効率の改善効果について検討した⁽³⁾。その結果、wavelet 基底による離散化は畳み込み積分計算の効率化に対して有効であることが確認できたが、文献⁽³⁾では一種類の境界条件設定(衝撃応答解析)の下での検討にとどまっており、共振が発生する問題や外部問題、散乱問題などについては未検討である。

そこで本研究では、文献⁽³⁾の時間域 wavelet BEM を用い、いくつかの異なる境界条件の下での波動伝播解析を行い、その計算効率について検討する。

2. Wavelet を用いた時間域境界要素法

2次元スカラー波動問題の支配方程式と境界条件、および初期条件は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \Delta u(x, t) - \frac{1}{c^2} \ddot{u}(x, t) &= 0, \quad (\text{in } \Omega) \\ u &= \bar{u}, \quad (\text{on } \Gamma_u) \quad q = \frac{\partial u}{\partial n} = \bar{q}, \quad (\text{on } \Gamma_q) \\ u(x, 0) &= u_0(x), \quad \dot{u}(x, 0) = v_0(x), \quad (\text{in } \Omega) \end{aligned} \quad (1)$$

ここで、 u は波動ポテンシャル、 c はその伝播速度であり、 Δ は Laplacian である。また、 Ω は領域であり、 Γ は境界とする。 Γ は部分境界 Γ_u, Γ_q からなり、 $\Gamma_u \cup \Gamma_q = \Gamma$ 、 $\Gamma_u \cap \Gamma_q = \emptyset$ であるものとする。

式 (1) の初期値境界値問題に対応する時間域境界積分方程式は、Brebber & Mansur の正則化を導入し、 $u_0 = 0$ 、 $v_0 = 0$ を仮定した上で次式で与える。

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} u(\mathbf{y}, \tau) - \int_0^\tau \int_\Gamma u^*(\mathbf{x}, t; \mathbf{y}, \tau) q(\mathbf{x}, t) d\Gamma_x dt \\ + \int_0^\tau \int_\Gamma q_1^*(\mathbf{x}, t; \mathbf{y}, \tau) u(\mathbf{x}, t) d\Gamma_x dt \\ + \int_0^\tau \int_\Gamma q_2^*(\mathbf{x}, t; \mathbf{y}, \tau) \dot{u}(\mathbf{x}, t) d\Gamma_x dt = f(\mathbf{y}, \tau) \end{aligned} \quad (2)$$

ここで、 $f(\mathbf{y}, \tau)$ は 0 (内部問題) または入射波動場 $u_{inc}(\mathbf{y}, \tau)$ (外部問題) で与えられるものとする。 u^* 、 q_1^* 、 q_2^* は式 (1) に対応する基本解であり、詳細は文献⁽³⁾を参照されたい。

式 (2) の時間についての離散化は、各時間ステップ間で u に線形近似、 q に後退方向区間一定近似、 $\dot{u}$ に後退差分近似を導入した上で、選点法を適用する。一方、境界積分方程式の離散化は、境界値関数 $u^{(p)}(\mathbf{x})$ 、 $q^{(p)}(\mathbf{x})$ を次の wavelet 展開で近似した上で、Galerkin 法により行う。

$$\begin{aligned} u^{(p)}(\mathbf{x}) &\approx \sum_{j=1}^{n_s} \hat{u}_{0,j} \phi_{0,j}(\mathbf{x}) + \sum_{k=0}^m \sum_{l=1}^{n_w(k)} \tilde{u}_{k,l} \psi_{k,l}(\mathbf{x}), \\ q^{(p)}(\mathbf{x}) &\approx \sum_{j=1}^{n_s} \hat{q}_{0,j} \phi_{0,j}(\mathbf{x}) + \sum_{k=0}^m \sum_{l=1}^{n_w(k)} \tilde{q}_{k,l} \psi_{k,l}(\mathbf{x}), \end{aligned} \quad (3)$$

ここで、 $\phi_{0,j}(\mathbf{x})$ は scaling 関数、 $\psi_{k,l}(\mathbf{x})$ は wavelet であり、本研究では Haar wavelet⁽²⁾を ψ として与える。 ϕ は区間一定関数となる。

その結果、時刻 $\tau = \tau_L$ において解くべき次の代数方程式を得る。

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_{L,2}^{(L)} \mathbf{u}^{(L)} - \mathbf{G}_L^{(L)} \mathbf{q}^{(L)} &= \mathbf{u}_{inc} + \sum_{p=1}^{L-1} \mathbf{G}_p^{(L)} \mathbf{q}^{(p)} \\ &+ \sum_{p=1}^{L-1} \left\{ -\mathbf{H}_{p,2}^{(L)} \mathbf{u}^{(p)} + \mathbf{H}_{p,1}^{(L)} \mathbf{u}^{(p-1)} \right\} \end{aligned} \quad (4)$$

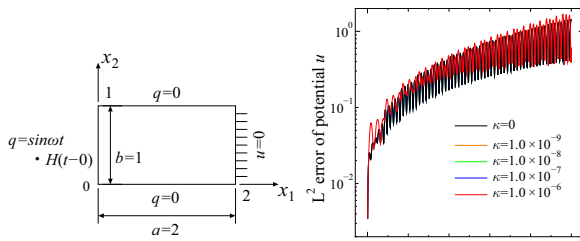
ここで、 $\mathbf{G}_p^{(L)}$ 、 $\mathbf{H}_{p,1}^{(L)}$ 、 $\mathbf{H}_{p,2}^{(L)}$ は係数行列であり、その成分は切り捨て対象となる。係数成分の切り捨ては、 $\mathbf{G}$ 行列成分 $g_{ij}^{(L,p)}$ の大きさが所定値 $\kappa \cdot g_{ref}$ (κ : 切り捨て基準値、 g_{ref} : $g_{ij}^{(L,p)}$ の代表値) を下回ったものについて実行する。なお、不要な計算を可能な限り省略する目的で、各係数成分の計算の前後2段階で判定する。

3. 解析結果

まず、一定周期で加振する問題として、図 1(a) の境界条件の下で解析を行った。なお、伝播速度 $c = 1$ とし、加振周波数を $\omega = \frac{5\pi}{4}$ となる 3 次共振周波数に設定した。 $n_s = 18$ 、 $m = 2$ (144 自由度) とし、 $\Delta t = 1/24$ ($\beta = (\text{区間一定部分長})/(c\Delta t) = 1$)、1200 ステップ分の解析を行なった。図 1 に、誤差の時刻歴、係数行列の保存率、計算時間をそれぞれ示す。係数行列の保存率および計算時間の挙動は、文献⁽³⁾の衝撃応答の解析と全く同一の傾向を示しており、解析時間の経過とともに特に使用メモリの削減効果が顕著と

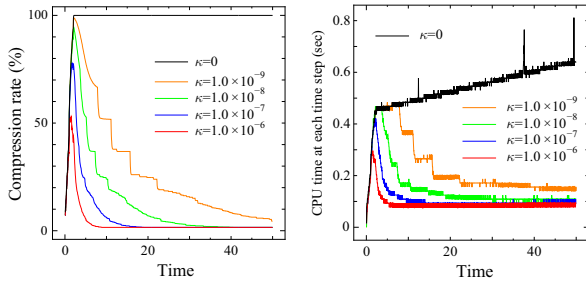
Key Words: 2次元スカラー波動問題, 時間域境界要素法, wavelet, 計算効率

〒950-2181 新潟県新潟市西区五十嵐二の町 8050 番地 TEL (025) 262-7274 FAX (025) 262-7274



(a) 境界条件.

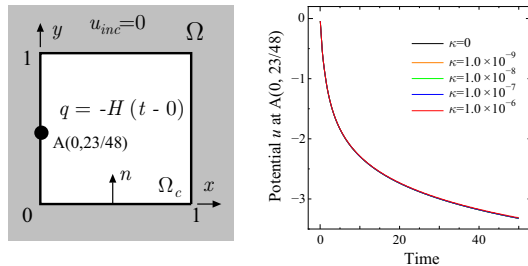
(b) 誤差の時刻歴.



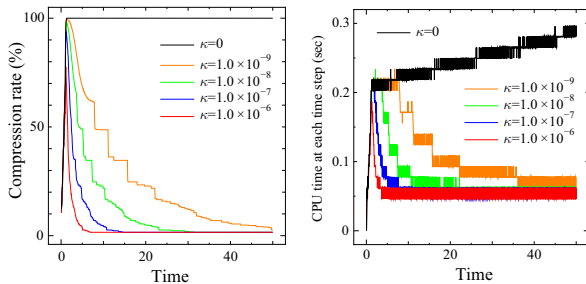
(c) 係数行列の保存率.

(d) 計算時間.

図-1 定常加振問題の解析結果 (解析例 1)



(a) 境界条件.

(b) 点 A での u の時刻歴.

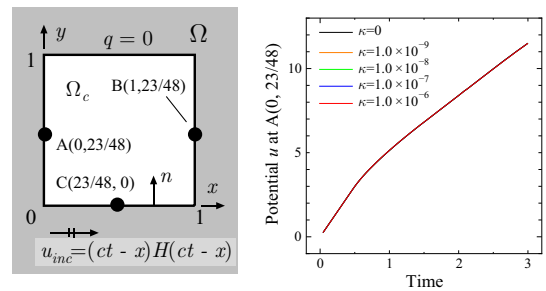
(c) 係数行列の保存率.

(d) 計算時間.

図-2 外部問題の解析結果 (解析例 2)

なっている．近似解の誤差については，文献³⁾の衝撃応答解析では概ね周期的かつ同水準の大きさであったのに対し，共振時には誤差が増大する傾向を示している．このことから，当該問題では，解析時間ステップの進行とともに係数行列成分の切り捨てによる計算効率の改善効果がより大きくなることを期待できる．

解析例 2 として，図 2(a) に示す正方形の空孔表面で $q = -H(t-0)$ となる境界条件を有する外部問題を考える．伝播速度 $c = 1$ とし，入射波動は存在しないものとした．また， $n_s = 12$ ， $m = 2$ (96 自由度) に設定し， $\Delta t = 1/24$ ，1200 ステップ分の解析を行った．解析結果より，係数行列



(a) 境界条件.

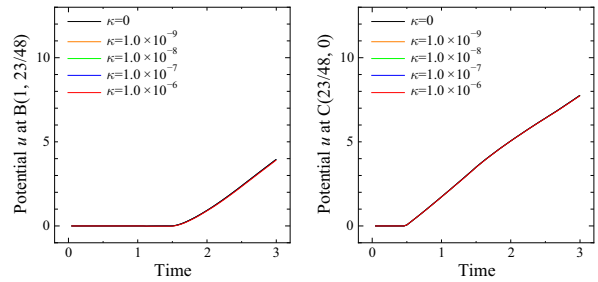
(b) 点 A での u の時刻歴.(c) 点 B での u の時刻歴.(d) 点 C での u の時刻歴.

図-3 波動入射による波動散乱問題の解析結果 (解析例 3)

の保存率および計算時間は解析例 1 と同様の傾向を示している．係数行列の保存率・計算時間ともに，およそ 100step あたりまでは増加傾向にあるが，それ以降はしだいに減少し，一定値に漸近する．なお，当該問題の離散化誤差は，内部に大きさ 1 の正方形の空孔を有する静的内部問題の近似解から推定できると思われる．そのため，切り捨て基準値はこの離散化誤差の推定値を基に事前設定できる可能性がある．

最後に，解析例 3 として，図 3(a) に示す正方形の空孔表面で $q = 0$ となる境界条件を有し， $u_{inc} = (ct-x)H(ct-x)$ が入射するときの波動散乱問題を考える．波動の伝播速度，および境界上・時間領域の離散化条件は，解析例 2 の場合と同一に設定した．解析結果として，図中 A, B, C の各点におけるポテンシャル u の時刻歴を図-3(b)-(d) に示す．各時刻において追加生成される係数行列の圧縮率，計算時間については，離散化条件が同一である解析例 2 と同一の結果となり，時間ステップの経過とともに畳み込み積分計算の負荷が相対的に小さなものとなっていく． u の時刻歴は係数成分の切り捨てを実行してもその影響は小さな範囲にとどまっていることが分かる．

参考文献

- 1) Beylkin, G., Coifman, R. & Rokhlin, V.: Fast wavelet transforms and numerical algorithms I. *Comm. Pure Appl. Math.*, Vol.44, pp.144-183, 1991.
- 2) Koro, K., Abe, K.: Non-orthogonal spline wavelets for boundary element analysis. *Engrg. Anal. Bound. Elems.*, Vol.25, pp.149-164, 2001.
- 3) 紅露一寛，菅波祐太，古川 陽，阿部和久：2 次元スカラー波動方程式のための非直交スプライン wavelet を用いた時間領域境界要素法．土木学会応用力学論文集，Vol.13, pp.241-252, 2010.