

空気-固体連成問題のための 演算子積分時間領域境界要素法

○東京工業大学大学院 学生会員 丸山泰蔵
東京工業大学大学院 正会員 斎藤隆泰
東京工業大学大学院 正会員 廣瀬壮一

1. はじめに

本研究では、空気-固体連成問題を解析するための演算子積分時間領域境界要素法¹⁾(CQ-BEM)について検討する。空気-固体の二層から成る領域を伝搬する波動問題を時間領域境界要素法を用いて直接解析する場合、空気-固体界面での境界条件をいかに適切に処理するかが、重要となる。本研究では、演算子積分時間領域境界要素法を空気-固体連成問題に応用するための新手法を提案する。空気領域で発生した圧力波がモード変換し、固体中を弾性波として伝搬する様子を解析することで、本手法の有効性について検討する。

2. 空気-固体連成問題に対する時間領域境界要素法

空気領域 D^I 、及び固体領域 D^{II} それぞれについて、圧力 p 、変位 u_i が満足する支配方程式を次に示す。

$$\nabla^2 p(\mathbf{x}, t) - \frac{1}{c_A^2} \frac{\partial^2 p(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2} = 0 \quad : \text{in } D^I \quad (1)$$

$$c_T^2 u_{i,jj}(\mathbf{x}, t) + (c_L^2 - c_T^2) u_{j,ji}(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial^2 u_i(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2} \quad : \text{in } D^{II} \quad (2)$$

ここで、 t は時刻、 c_A は空気領域 D^I 中の波速、 c_L, c_T は固体領域 D^{II} 中における縦波、横波の波速を表している。また、支配方程式 (1), (2) から導出される境界積分方程式はそれぞれ次式で表される。

$$C(\mathbf{x})p(\mathbf{x}, t) = p^{\text{in}}(\mathbf{x}, t) + \int_S G(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) * q(\mathbf{y}, t) dS_y - \int_S H(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) * p(\mathbf{y}, t) dS_y \quad : \text{in } D^I \quad (3)$$

$$C_{ij}(\mathbf{x})u_j(\mathbf{x}, t) = \int_S U_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) * t_j(\mathbf{y}, t) dS_y - \int_S T_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) * u_j(\mathbf{y}, t) dS_y \quad : \text{in } D^{II} \quad (4)$$

ここで、 $C(\mathbf{x})$ 及び、 $C_{ij}(\mathbf{x})$ は点 $\mathbf{x}$ における境界形状に依存する自由項であり、 $*$ は畳込み積分を表している。また、 $G(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t), H(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)$ は 2 次元スカラー波動問題における基本解、及び二重層核、 $U_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t), T_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)$ は 2 次元弾性波動問題における基本解と二重層核であり、 q は圧力勾配、 t_i は表面力を表している。式 (3), (4) を連立させて解くために必要な空気-固体界面での時間領域における境界条件を次に示す²⁾。

$$-\rho_A \frac{\partial^2 u_2(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2} = \frac{\partial p(\mathbf{x}, t)}{\partial n_x} = q(\mathbf{x}, t) \quad (5)$$

$$t_2(\mathbf{x}, t) = -p(\mathbf{x}, t) \quad (6)$$

$$t_1(\mathbf{x}, t) = 0 \quad (7)$$

ここで、 ρ_A は空気の密度、 $\partial/\partial n_x$ は点 $\mathbf{x}$ における法線方向微分を表している。式 (5)-(7) を用いて、式 (3), (4) を連成する場合、式 (5) は変位 u_2 の時間に関する二回微分項を含む。そのため、式 (3), (4) を式 (5)-(7) を用いて、時間領域で直接連成することは困難である。そこで、本研究では次節で述べるような方法を用いて、時間領域境界積分方程式 (3), (4) を連成する。

3. 演算子積分時間領域境界積分方程式の連成

演算子積分法を用いて、時間 t を時間増分 Δt を用いて N ステップに分割し、第 n ステップにおいて式 (3), (4) で表される空気領域、及び固体領域に対応する境界積分方程式を離散化すると次の式を得る。

$$C(\mathbf{x})p(\mathbf{x}, n\Delta t) = p^{\text{in}}(\mathbf{x}, n\Delta t) + \sum_{k=0}^n \left[A^{n-k}(\mathbf{x}, \mathbf{y}^\alpha) q(\mathbf{y}^\alpha, k\Delta t) - B^{n-k}(\mathbf{x}, \mathbf{y}^\alpha) p(\mathbf{y}^\alpha, k\Delta t) \right] \quad (8)$$

$$C_{ij}(\mathbf{x})u_j(\mathbf{x}, n\Delta t) = \sum_{k=0}^n \left[D_{ij}^{n-k}(\mathbf{x}, \mathbf{y}^\alpha) t_j(\mathbf{y}^\alpha, k\Delta t) - E_{ij}^{n-k}(\mathbf{x}, \mathbf{y}^\alpha) u_j(\mathbf{y}^\alpha, k\Delta t) \right] \quad (9)$$

ここで、 $A^m(\mathbf{x}, \mathbf{y}), B^m(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ 、及び $D_{ij}^m(\mathbf{x}, \mathbf{y}), E_{ij}^m(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ はそれぞれ空気領域、及び固体領域の影響関数³⁾であり、例えば、 $A^m(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ は次のように表される。

$$A^m(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\mathcal{R}^{-m}}{L} \sum_{l=0}^{L-1} \tilde{A}^l(\mathbf{x}, \mathbf{y}) e^{-\frac{2\pi i m l}{L}} \quad (10)$$

ただし、 $\tilde{A}^l(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \int_S \hat{G}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, s_l) dS_y$ であり、 $\hat{G}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, s_l)$ は 2 次元スカラー波動問題におけるラプラス変換域基本解である。また、 s_l は $s_l = \delta(\zeta_l)/\Delta t$ であり、 $\delta(\zeta_l), L, \mathcal{R}$ は演算子積分法におけるパラメータである³⁾。今、境界物理量、例えば圧力 p について、次のようなフーリエ変換を定義する。

$$\tilde{p}^l(x) = \sum_{k=0}^{N-1} \mathcal{R}^k p(x, k\Delta t) e^{\frac{2\pi i k l}{N}} \quad (11)$$

これより、フーリエ逆変換は

$$p(x, n\Delta t) = \frac{\mathcal{R}^{-n}}{L} \sum_{k=0}^{L-1} \tilde{p}^l(x) e^{-\frac{2\pi i k l}{L}} \quad (12)$$

で表わされる. $L = N$ として, 式 (11), (12) の関係を用いて, 圧力勾配 q , 変位 u_i や表面力 t_i についてもそれぞれフーリエ変換 $\tilde{q}, \tilde{u}_i, \tilde{t}_i$ を定義し, それらを用いて式 (8), (9) を書き直すと次のようになる.

$$C(x)\tilde{p}^l(x) = \tilde{p}^{\text{in},l}(x) + \tilde{A}^l(x, y^\alpha)\tilde{q}^l(y^\alpha) - \tilde{B}^l(x, y^\alpha)\tilde{p}^l(y^\alpha) \quad (13)$$

$$C_{ij}(x)\tilde{u}_j^l(x) = \tilde{D}_{ij}^l(x, y^\alpha)\tilde{t}_j^l(y^\alpha) - \tilde{E}_{ij}^l(x, y^\alpha)\tilde{u}_j^l(y^\alpha) \quad (14)$$

式 (13), (14) を導いたのと同様に, 境界条件式 (5)-(7) をフーリエ空間で表現すると, 次のようになる.

$$\rho_A s_1^2 \tilde{u}_2^l(x) = \frac{\partial \tilde{p}^l(x)}{\partial n_x} = \tilde{q}^l(x) \quad (15)$$

$$\tilde{t}_2^l(x) = -\tilde{p}^l(x) \quad (16)$$

$$\tilde{t}_1^l(x) = 0 \quad (17)$$

式 (15)-(17) は式 (5)-(7) のように, 境界条件に時間に関する微分項は含まれていない. よって, 式 (15)-(17) を用いれば, 式 (13), (14) を容易に連成することが可能となる.

4. 数値解析例

数値解析例として, 図 1 のような, 空気領域 D^I から入射波を送信する解析モデルを考える. 解析には, 図 1 中の材料定数を用い, $\Delta t = 0.02 \mu\text{s}$, $N = L = 1024$ とした. また, 入射波は次の式で表される線波源とした.

$$p^{\text{in}}(x, t) = \int_{S_t} G(x, y, t) * v(y, t) dS_y \quad (18)$$

$$v(y, t) = \begin{cases} \sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right) & (0 \leq t \leq T) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases} \quad (19)$$

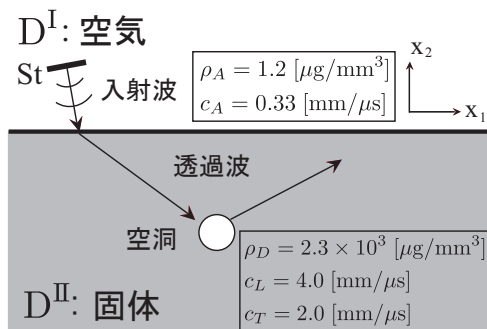


図 1 空気-固体モデル図

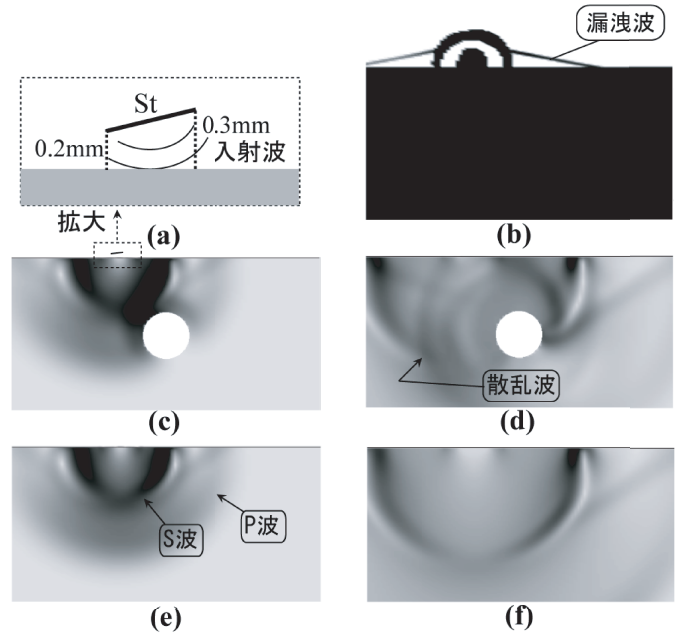


図 2 空気, 固体領域における波動伝搬の可視化 (a) 線波源の詳細 (b) 漏洩波の可視化 (c) 欠陥あり, $t = 3.0 \mu\text{s}$ (d) 欠陥あり, $t = 5.0 \mu\text{s}$ (e) 欠陥なし, $t = 3.0 \mu\text{s}$ (f) 欠陥なし, $t = 5.0 \mu\text{s}$

ここで, T は入射波の周期であり, 解析では $1.0 \mu\text{s}$ で与えている. 線素 S_t の積分領域は図 2(c) の拡大図である図 2(a) で表される. また, 入射角は 6° とした. 固体領域での弾性波動伝搬の可視化結果 (変位の絶対値) を図 2(c), (d) に示す. 比較のため, 欠陥がない場合の結果も図 2(e), (f) に示してある. 図 2(c)-(f) より, 空気領域から入射された波動が固体領域では, P 波, SV 波へとモード変換する様子を確認できる. また, 図 2(c), (d) より, 空洞によって, P 波, SV 波が散乱される様子も見てとれる. また, 図 2(b) に空気領域のみに注目した圧力波の絶対値を示す. 固体中の波動による漏洩波を確認することができる.

5. 結論と今後の課題

空気-固体連成問題のための演算子積分時間領域境界要素法を開発した. 開発した手法を用いて, 空気-固体連成問題における固体領域内部の空洞による弾性波動散乱解析を行った. 本手法は当然のことながら, 液体 (非圧縮性流体)-固体連成問題に対してもそのまま適用することができる.

今後は, 3 次元解析への拡張, 及び非接触非破壊検査手法として注目を集めている空気超音波法のシミュレーションへ本手法を適用する予定である.

参考文献

- 1) 斎藤隆泰, 石田貴之, 福井卓雄, 廣瀬壮一: 演算子積分法および高速多重極法を用いた新しい二次元時間領域動弾性境界要素法について, 応用力学論文集 Vol.11, pp.193-200, 2008.
- 2) 廣瀬壮一, 北原道弘: 液体-固体の境界近傍における欠陥による散乱, 境界要素法研究会境界要素法論文集第 8 巻, pp.63-68, 1991.
- 3) 斎藤隆泰, 廣瀬壮一: ラプラス変換域基本解を用いた新しい時間領域境界要素法と 2 次元波動伝播問題への応用, 理論応用力学講演会講演論文集, OS05-02(CD-ROM 収録), 2011