DG 法による浅水長波流れ解析

中央大学大学院 学生会員 ○牧野 優作
ノートルダム大学 正会員 田中 聖三
日本工営（株） 正会員 桜庭 雅明
中央大学 正会員 樫山 和男

1. はじめに

河川の氾濫，高潮，津波などの数値シミュレーションには，浅水長波方程式が広く用いられている．浅水長波方程式を高精度に解くことは水害による被害を予測する上で重要である．有限要素法においては，近年，重み関数と近似関数に要素間に C^0 不連続となる関数を用い，その要素境界において局所的な Flux の収支を考慮して解析を行う，DG 法 (Discontinuous Galerkin 法)[1] が注目されており，特に不連続性のある問題に対して有効に用いられている．

本論文は，浅水長波方程式に対して DG 法を適用し，その有効性を検討するものである．数値解析例として段波問題を取り上げ，厳密解および従来の CG 法 (SUPG 法に基づく安定化有限要素法)[2] との結果の比較により DG 法の計算精度，安定性について検討する．

2. 数値解析手法

(1) 支配方程式

支配方程式には，以下に示す浅水長波方程式を用いる．

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{U}) = \mathbf{S}(\mathbf{U}) \tag{1}$$

ここで，$\mathbf{U}$ は保存変数，$\mathbf{F}(\mathbf{U})$ は流束関数，$\mathbf{S}(\mathbf{U})$ はソース項であり, 以下のように定義される．

$$\mathbf{U} = [\ h,\quad q_x,\quad q_y\ ]^{\mathrm{T}}, \tag{2}$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{U}) = [\ \mathbf{F}_1(\mathbf{U}),\quad \mathbf{F}_2(\mathbf{U})\ ]^{\mathrm{T}}, \tag{3}$$

$$\mathbf{F_1}(\mathbf{U}) = \begin{bmatrix} q_x \\ \frac{{q_x}^2}{h} + \frac{1}{2}gh^2 \\ vq_x \end{bmatrix}, \mathbf{F_2}(\mathbf{U}) = \begin{bmatrix} q_y \\ uq_y \\ \frac{{q_y}^2}{h} + \frac{1}{2}gh^2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{S}(\mathbf{U}) = \begin{bmatrix} 0 \\ -gh\frac{\partial z}{\partial x} \\ -gh\frac{\partial z}{\partial y} \end{bmatrix} \tag{4}$$

ここで, h は全水深, q_x, q_y は x, y 軸方向の流量 ($q_x = uh$, $q_y = vh$)，u, v は，x, y 軸方向の断面平均流速，g は重力加速度であり，z は標高である．

(2) DG 法による空間方向の離散化 [1]

式 (1) に対して DG 法を適用すると，以下の弱形式が得られる．

$$\int_{\tilde{\Omega}} \mathbf{W}^h \cdot \frac{\partial \mathbf{U}^h}{\partial t} d\Omega - \int_{\tilde{\Omega}} \nabla \mathbf{W}^h \cdot \mathbf{F}(\mathbf{U}^h) d\Omega + \int_{\partial\tilde{\Omega}} \mathbf{W}^h \cdot (\hat{\mathbf{F}}(\mathbf{U}^h) \cdot \mathbf{n}) d\Omega = \int_{\tilde{\Omega}} \mathbf{W}^h \cdot \mathbf{S}(\mathbf{U}^h) d\Omega \tag{5}$$

ここで，$\mathbf{W}^h = [w_h^h, w_{q_x}^h, w_{q_y}^h]^{\mathrm{T}}$ は要素ごとに定義される不連続な重み関数である．なお, 補間関数としては 1 次関数を用いる．また，$\tilde{\Omega}$ は要素内部領域の集合，$\partial\tilde{\Omega}$ は要素境界の集合，$\mathbf{n} = [n_x, n_y]^{\mathrm{T}}$ は $\partial\Omega_e$ の外向き法線ベクトル，式 (5) の左辺第 3 項はフラックス項であり，次節で説明を行う．

(3) 数値フラックス

本論文では数値フラックスとして，次式で定義される Local Lax-Friedrichs Flux[1] を用いる．

$$\hat{\mathbf{F}}(\mathbf{U}^h) \cdot \mathbf{n} = \frac{1}{2}[\mathbf{F}(\mathbf{U}^{h-}) + \mathbf{F}(\mathbf{U}^{h+}) - a_{\max}(\mathbf{U}^{h+} - \mathbf{U}^{h-})] \tag{6}$$

ここで，$a_{\max}$ は以下のように定義される．

$$\begin{aligned} a_{\max} = \max(&|u^+ n_x + v^+ n_y - c^+|, \\ &|u^- n_x + v^- n_y - c^-|, \\ &|u^+ n_x + v^+ n_y + c^+|, \\ &|u^- n_x + v^- n_y + c^-|) \end{aligned} \tag{7}$$

$$c^+ = \sqrt{gh^+}, c^- = \sqrt{gh^-}$$

また，$f^{\pm}$ は，以下のように定義される．

$$f^{\pm}\ |_{\partial\Omega_e} = \lim_{\epsilon \to 0} f(\mathbf{x} \pm \epsilon\mathbf{n}) \tag{8}$$

(4) 時間方向の離散化

式 (5) をまとめると，以下の式で表すことができる．

$$\partial_t \mathbf{U} = \mathbf{L}(\mathbf{U}) \tag{9}$$

上式に対して，3 次精度陽的 Runge-Kutta 法を適用すると，以下のように離散化できる．

$$\mathbf{U}^{(1)} = \mathbf{U}^n + \Delta t \mathbf{L}(\mathbf{U}^n) \tag{10}$$

$$\mathbf{U}^{(2)} = \frac{3}{4}\mathbf{U}^n + \frac{1}{4}\Big(\mathbf{U}^{(1)} + \Delta t \mathbf{L}(\mathbf{U}^{(1)})\Big) \tag{11}$$

$$\mathbf{U}^{(n+1)} = \frac{1}{3}\mathbf{U}^n + \frac{2}{3}\Big(\mathbf{U}^{(2)} + \Delta t \mathbf{L}(\mathbf{U}^{(2)})\Big) \tag{12}$$

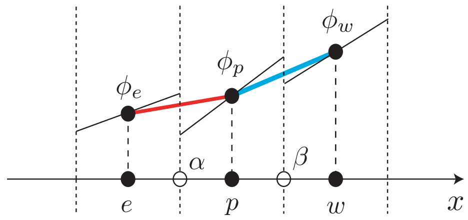
(5) Slope Limiter

前項で示した時間方向の離散化により解を求めると，オーバーシュートやアンダーシュートが生じる．このような数値不安定性を回避するために，Slope Limiter 処理 [3] を導入する．ここで，**図-1** に示す 1 次元要素モデルを考える．Limiter 処理は，その対象となる要素 p 自身と接続された要素 e, w を用いて行われる．まず，各要素の中心座標における物理量より，線形関数 $L_*(* = ep, wp, p)$ を求める．

$$L_{ep} = N_e\phi_e + N_p\phi_p,\ L_{wp} = N_w\phi_w + N_p\phi_p \tag{13}$$

$$\phi_e = \phi(\mathbf{x}_e), \phi_p = \phi(\mathbf{x}_p), \phi_w = \phi(\mathbf{x}_w) \tag{14}$$

KeyWords： DG 法，浅水長波方程式，段波問題
連絡先： 〒112-8551 東京都文京区春日 1-13-27 TEL 03-3817-1808 FAX 03-3817-1815



図－１ １次元要素モデル

また，処理の対象となる要素 p 内においても以下のように求める．

$$L_p = N_\alpha \phi_\alpha + N_\beta \phi_\beta \tag{15}$$

$$\phi_\alpha = \phi(\mathbf{x}^e_\alpha), \phi_\beta = \phi(\mathbf{x}^e_\beta) \tag{16}$$

ここで，N は，形状関数である．次に，各関数 L_* の勾配 $|\nabla L_*|$ を求め，以下の手順により Limiter 処理を行う．

1. 最も勾配 $|\nabla L_*|$ の大きな線形関数を選択し，$L = L_*$ とする．
2. 要素 p において，オーバーシュート，もしくはアンダーシュートの有無を確認する．

$$\min(\phi_e, \phi_p) \leq L(\mathbf{x}^{\mathbf{e}}_\alpha) \leq \max(\phi_e, \phi_p) \tag{17}$$

$$\min(\phi_w, \phi_p) \leq L(\mathbf{x}^{\mathbf{e}}_\beta) \leq \max(\phi_w, \phi_p) \tag{18}$$

3. 式 (17)，(18) を満足していなければ，$|\nabla L_*|$ の２番目の大きなものを L とし，2. に戻る．さらに，これも満足していなければ，$|\nabla L_*|$ の最小のものを L とする．
4. 得られた L を L_p とし，ϕ_α，ϕ_β を修正する．

なお，この処理は Runge-Kutta 法の各ステップ毎に行う．

3. 数値解析例

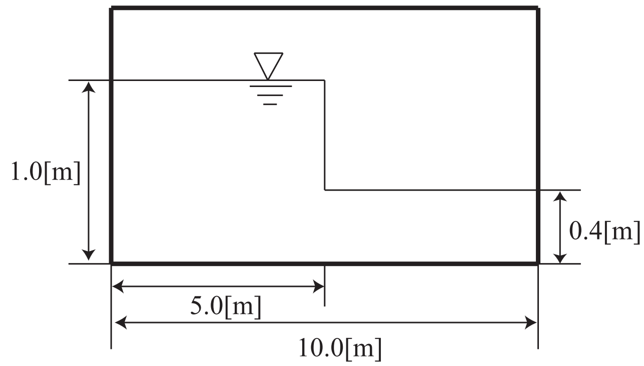
本手法の計算精度と安定性を検討するために，段波問題を取り上げ，厳密解，CG 法による計算結果との比較を行う．なお，CG 法の空間方向の離散化には SUPG 法に基づく安定化有限要素法 [2)]，時間方向の離散化には３次精度陽的 Runge-Kuuta 法を用いた．解析モデルを**図-2** に示す．x 方向分割幅 0.1[m]，微小時間増分量 0.01[s] とした．

解析結果として，**図-3** と**図-4** にそれぞれ１秒後の水面形状，流速分布を示す．なお，この解析結果は１次元要素を用いて計算を行ったものである．**図-3** と**図-4** より，本手法による結果は CG 法に比べて減衰がなく高精度な結果となっていることがわかる．**表-1** に体積保存率を示す．これより，DG 法は体積を完全に保存していることがわかる．

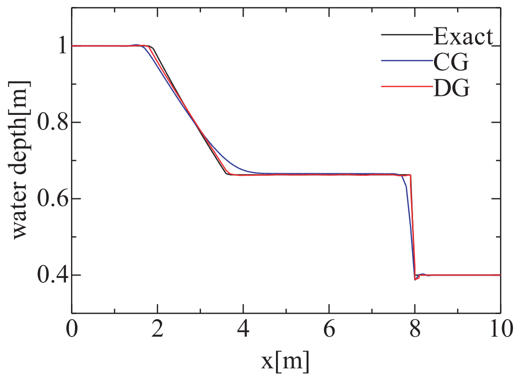
4. おわりに

本論文では，浅水長波方程式に対して，DG 法を適用し，その有効性を検討した．数値解析例として，段波問題を取り上げた．DG 法は，従来の CG 法に比べて高精度な結果を与えることが確認された．また，本手法は保存性も完全に満足していることが確認された．

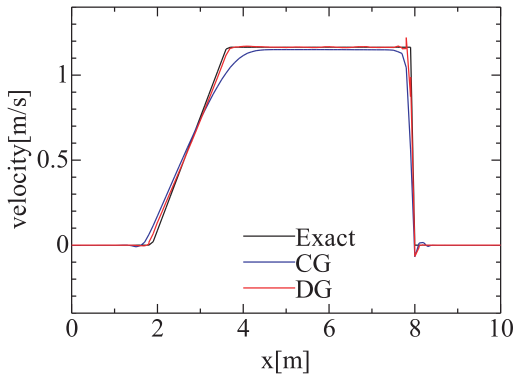
今後の課題として，移動境界問題への適用などが挙げられる．



図－２ 解析モデル



図－３ 水面形状



図－４ 流速分布

表－１ 体積保存率

CG	99.999[%]
DG	100.000[%]

参考文献

1) G.Kesserwani, R.Ghostine, J.Vazquez, A.Ghenaim, R.Mose：Riemann solvers with Runge-Kutta discontinuous Galerkin schemes for the 1D shallow water equations, *Journal of Hydraulic Engineering.*, Vol.134, No.2, pp.243-255, 2008.

2) S.Takase, K.Kashiyama, S.Tanaka and T.E.Tezduyar：Space-time SUPG formulations of the shallow water, *Int. J. Num. Meth. in Fluids*, Vol.64, pp1379-1394, 2010.

3) L.J.Durlofsky, B.Engquist and S.Osher：Traiangle based adaptive stencils for the solution of hyperbolic conservation lows, *Journal of Computational Physics*, 98, pp.64-73, 1992.