熱流体連成解析における流出境界条件処理法の比較研究

中央大学大学院 学生員 ○ 池田 哲也
中央大学 正会員 樫山 和男
日本コムシス (株) 正会員 石坂 俊輔

1. はじめに

等温場における流れの有限要素解析においては, 流出側境界条件として Neumann 境界条件である Traction-free 条件を用いる場合が多い. しかし, 非等温場である熱流体連成問題の場合には, エネルギー方程式の Neumann 型境界条件である温度勾配の値を 0 とすると断熱条件となるため, 流出境界付近に熱が滞留して不自然な流れが生じてしまう. そこで, 合理的な流れの流出を実現するため, 様々な流出境界条件処理法が提案されている.

本報告では, これまで提案されたいくつかの流出境界条件処理法を安定化有限要素法に基づく熱流体連成解析に導入し, それらの比較検討を行った.

2. 数値解析手法

(1) 基礎方程式

流体は非圧縮性粘性流体を仮定し, 基礎方程式として, Boussinesq 近似を用いた無次元化された Navier-Stokes 運動方程式, 連続式およびエネルギー方程式を用いる.

運動方程式:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t}+u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial p}{\partial x_i} -\frac{1}{Re}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)-\frac{Gr}{Re^2}\Theta\delta_{i3}=0 \quad \text{in } \Omega \tag{1}$$

連続式:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i}=0 \quad \text{in } \Omega \tag{2}$$

エネルギー方程式:

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t}+u_i\frac{\partial \Theta}{\partial x_i}+\frac{1}{PrRe}\frac{\partial^2\Theta}{\partial {x_i}^2}=0 \quad \text{in } \Omega \tag{3}$$

ここで, u_i は x_i 方向の流速成分, p は圧力, Θ は温度, δ_{i3} はクロネッカーのデルタ, $Re(=UL/\nu)$ は Reynolds 数, $Gr(=g\beta(T_w-T_c)L^3/\nu^2)$ は Grashoh 数, $Pr(=\nu/\alpha)$ は Prantdl 数である. また, $Ra(Pr\times Gr)$ はRayleigh 数を表す. ただし g は重力加速度, β は体膨張係数, Θ_w は高温壁温度, Θ_c 低温壁温度, U は代表速度, L は代表長さ, ν は動粘性係数, α は温度伝導率である. 境界条件としては, 次式が用いられる.

$$u_i=g_i \qquad (\text{on } \Gamma_g) \tag{4}$$

$$\left(-p\delta_{ij}+\frac{1}{Re}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)\right)n_j=h_i \qquad (\text{on } \Gamma_h) \tag{5}$$

$$\Theta=\hat{\Theta} \qquad (\text{on } \Gamma_\Theta) \tag{6}$$

$$\frac{1}{RePr}\frac{\partial\Theta}{\partial n_j}=S \qquad (\text{on } \Gamma_S) \tag{7}$$

ここで, Γ_g, Γ_Θ は Dirichlet 境界, Γ_h, Γ_S は Neumann 境界を表し, g_i, h_i は Γ_g, Γ_h 境界上での流速, トラクションである. また, $\hat{\Theta}$ は Γ_Θ 境界上での壁面温度, S は Γ_S 境界上の法線方向の温度勾配, n_j は境界上の外向き単位法線ベクトルである.

(2) 流出境界条件処理法

本報告では流出境界条件として, Traction-free 条件, Sommerfeld 放射条件 (以下 S.R.C) に基づく流出境界条件及び中山らによって提案された流出境界条件処理法[1]を用いる. 中山らの手法とは, 境界積分項を未知量として扱う Free Outflow Boundary Condition(以下 F.O.B.C.) に S.R.C. を組み込んだ境界条件を適用するものである. 具体的には, 式 **(1)**, **(2)**, **(3)** に対して安定化有限要素法による定式化を行う際に導出される弱形式の境界積分項は, 流出境界外向き法線方向を x_1 方向にとると次式のようになる.

$$\int_{\Gamma_h}\omega_i h_i d\Gamma=\int_{\Gamma_h}\omega_i\left\{-p\delta_{i1}+\frac{1}{Re}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_1}+\frac{\partial u_1}{\partial x_i}\right)\right\}d\Gamma \tag{8}$$

$$\int_{\Gamma_s}\omega S d\Gamma=\frac{1}{RePr}\int_{\Gamma_s}\omega\frac{\partial\Theta}{\partial x_1}d\Gamma \tag{9}$$

ここで ω_i は重み関数である. 次に, S.R.C. により得られる式 **(10)** を式 **(8)**, **(9)** に代入することを考える.

$$\frac{\partial\phi}{\partial x_1}=-\frac{1}{U_c}\frac{\partial\phi}{\partial t} \tag{10}$$

ここで ϕ は運動方程式に対しては u_i, エネルギー方程式に対しては Θ であり, U_c は伝播速度である. 以上より

$$\int_{\Gamma_h}\omega_i h_i d\Gamma=\int_{\Gamma_h}\omega_i\left\{-p\delta_{i1}+\frac{1}{Re}\left(-\frac{1}{U_c}\frac{\partial u_i}{\partial t}+\frac{\partial u_1}{\partial x_i}\right)\right\}d\Gamma \tag{11}$$

$$\int_{\Gamma_s}\omega S d\Gamma=\frac{1}{RePr}\int_{\Gamma_s}\omega\frac{\partial\Theta}{\partial x_1}d\Gamma \tag{12}$$

(3) 離散化手法

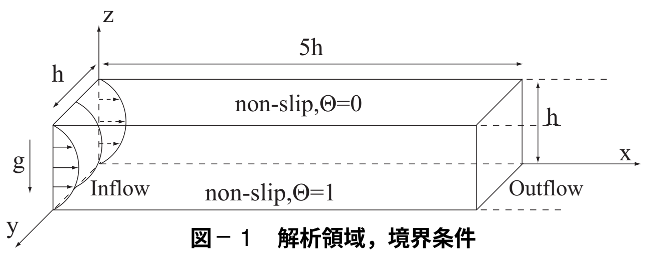
基礎方程式 **(1)**, **(2)**, **(3)** 式に安定化有限要素法を適用し, P1/P1(流速・圧力・温度ともに 1 次) 要素を用いて空間方向の離散化を行う. 時間方向の離散化には, Crank-Nicolson 法を用い, その結果得られる連立一次方程式の解法には, Element-by-Element Bi-CGSTAB2 法を用いた.

3. 数値解析例

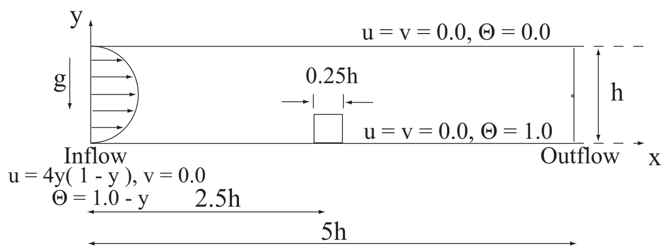
(1) 3 次元平行平板間熱対流問題

図－1 に解析領域, 境界条件を示す. 解析条件は, 領域分割数を x, y, z 方向それぞれ, 40 分割× 10 分割× 20 分割, 総節点数 9,471, 総要素数 48,000, 最小要素幅 0.05h, y 方向側面に周期境界条件を与える. 初期条件は流速・圧力に関して全領域で 0, 温度に関しては下壁面 (Θ = 1) を除

KeyWords: 安定化有限要素法, エネルギー方程式, 流出境界条件処理法
連絡先: 〒112-8551 東京都文京区春日 1-13-27 TEL 03-3817-1808 FAX 03-3817-1815



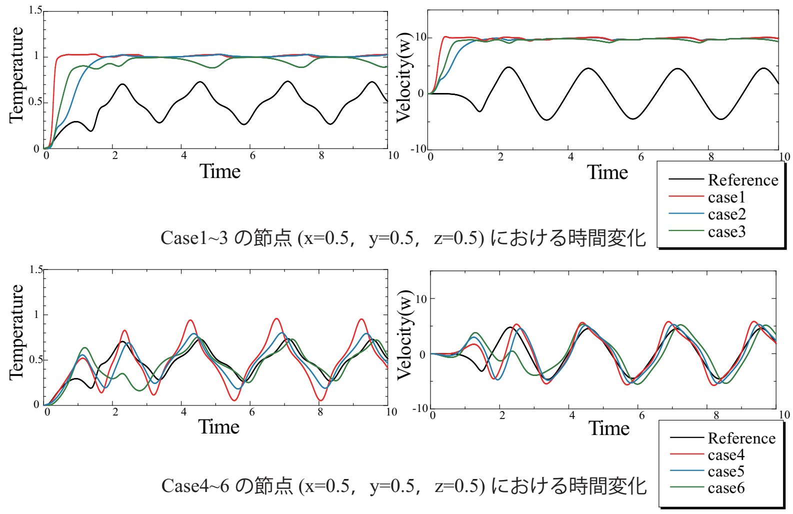
図－１　解析領域，境界条件



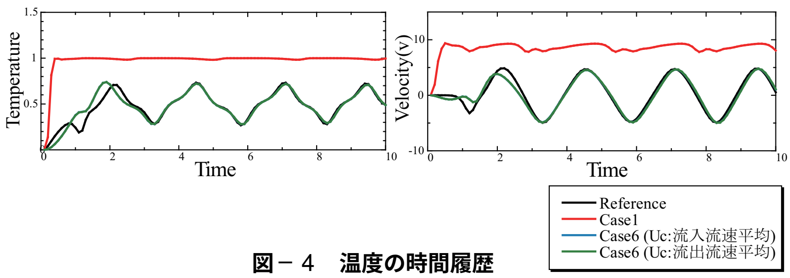
図－２　解析領域，境界条件

	運動方程式	エネルギー方程式
Case1	Traction-free 条件	断熱条件
Case2	Traction-free 条件	S.R.C.
Case3	Traction-free 条件	F.O.B.C.+S.R.C.
Case4	F.O.B.C.+S.R.C.	断熱条件
Case5	F.O.B.C.+S.R.C.	S.R.C.
Case6	F.O.B.C.+S.R.C.	F.O.B.C.+S.R.C.

表－１　流出境界条件処理ケース



図－３　温度・鉛直方向流速の時間変化



図－４　温度の時間履歴

き $\Theta = 0$ とした．流入流速は $u = 4z(1-z)$，$v = w = 0.0$ で与え，流入壁面温度は $\Theta = 1.0 - z$，Reynolds 数は 10，Prantdl 数は 0.667，Grashoh 数は 1.5×10^4，微小時間増分量は 1.0×10^{-3}，流出境界上での伝播速度 U_c は流入流速の平均値を用いた．流出境界条件処理の比較を行い，それぞれのケースを**表－１**に示す．参照解はメッシュ分割幅を変えずに，x 方向長さを 7.5h としたものを用いた結果であり，それぞれのケースと同じ座標節点での値と比較する．なお，**表－１**にある Traction-free 条件とは，式 **(5)** の h_i を 0，断熱条件は式 **(7)** の S を 0 とする条件である．また，F.O.B.C.+S.R.C. とは中山らによる流出境界条件処理法である．　**図－３**にそれぞれのケースでの流出境界節点 (5.0h，0.5h，0.5h) 上の温度，z 方向流速の時間履歴を示す．Case1～3 の場合，図に示すように温度，z 方向流速ともに不自然な値を示してる．一方，Case4～6 の場合，参照解と概ね良好な一致を示し，特に Case5，6 においては参照解と良い一致を示していることがわかる．

(2)　気流障害物を有する平行平板間熱対流問題

図－２に解析領域，境界条件を示す．領域分割数を x，y 方向に，200 分割× 100 分割，総節点数 20,076，総要素数 39,500，最小要素幅 0.01h，初期条件は流速・圧力に関して全領域で 0，温度に関しては下壁面 ($\Theta = 1$) を除き $\Theta = 0$ とした．障害物壁面について，流速は non-slip 条件，温度は断熱条件とした．Reynolds 数，Prantdl 数，及び Grashoh 数は **(1)** の例題と同様である．流出境界条件処理の比較は，**表－１**の Case1 と 6 で行い，さらに Case6 において伝播速度の検討をした．参照解はメッシュ分割幅を変えずに，x 方向長さを 7.5h としたものを用いた結果であり，それぞれのケースと同じ座標節点での値と比較する．

図－４にそれぞれのケースでの流出境界節点 (5.0h, 0.5h) 上の温度，y 方向流速の時間履歴を示す．Case6 においては，温度と y 方向流速において参照解に非常に近い結果となり，伝播速度に関しては，流入流速の平均値，流出流速の平均値を用いたがどちらも妥当な結果を得た．

4.　おわりに

本報告では安定化有限要素法に基づく解析に流出境界条件処理法導入し，それらの比較検討を行った．その結果，以下の結論を得た．

- F.O.B.C に S.R.C を組み込んだ中山らの流出境界条件処理法を運動方程式，エネルギー方程式の両方に用いることで，合理的な流れの流出を実現できた．
- 伝播速度の与え方として，流入境界流速の平均値，または流出境界流速の平均値を与える方法が参照解と最も良い一致を示した．

参考文献

1) 中山司，岩崎潤：熱移動を伴う管内粘性流の有限要素法解析における流出境界条件に関する検討，日本機械学会論文集 (B 編)，58 巻 554 号 (1992-10)，pp.43-48
2) T.E.Tezduyar：Stabilized finite element formulations for incompressible flow computations, Advance in Applied Mechanics，28，pp.1-44，1992.