

混合型剛塑性有限要素解析へのアダプティブ法の適用について

京都大学 学生会員 ○島越 貴之
 京都大学 正会員 西藤 潤
 金沢大学 正会員 小林 俊一

1. はじめに

剛塑性解析法とは、構造物の弾性変形を無視し、塑性崩壊状態の崩壊機構や極限荷重を直接求める手法である。弾塑性有限要素解析と比較すると、「少ない材料パラメータで解析を行うことが可能である。」「少ない計算量で塑性崩壊荷重を計算できる可能性がある。」「塑性荷重に近づいても数値不安定性が生じない。」といった特徴を有している。剛塑性有限要素法は、塑性化しない領域、すなわち剛体変形する領域は細かく要素分割する必要がない。そこで、塑性化している領域を細かく、そうでない領域を粗く要素分割するため、アダプティブ法の適用を試みる。

これまで、Borgesら¹⁾が混合型剛塑性有限要素法にアダプティブ法を適用している。しかし、彼らは三角形要素による離散化を行ったため、ロッキングの問題が生じており、効率的に解を求めることには成功していない。本研究では、ロッキングを避けるため西藤・小林らの提案した四角形要素²⁾に対してアダプティブ法を適用した。

2. 混合型剛塑性有限要素解析の定式化

剛塑性体に荷重を与えたときの剛塑性境界値問題を図-1に示す。領域 D は剛塑性体、 S_σ は応力境界、 S_u は変位速度境界である。また、 α は荷重係数であり、 \mathbf{b}_1 および \mathbf{b}_0 は一定荷重ベクトルである。本報では、系が塑性崩壊するときの荷重係数 α および崩壊メカニズム(崩壊時の変位速度状態)を求める問題を剛塑性境界値問題と呼ぶこととする。下界定理によると、つりあい

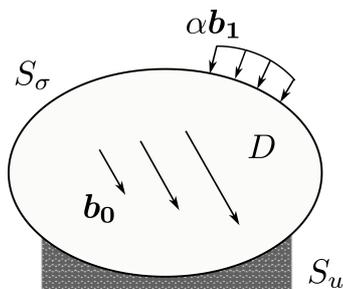


図-1 剛塑性境界値問題

式と応力境界条件を満たす応力場が降伏条件を破らないとき、荷重係数 α は真の崩壊荷重係数 α^* の下界値をとることが知られている。つまり、荷重係数 α を最大化すれば崩壊時の荷重係数 α^* の近似解が得られる。したがって剛塑性境界値問題は以下の非線形最適化問題に帰着する。

$$\begin{aligned} & \max_{\alpha, \sigma} \alpha \\ & \text{subject to} \begin{cases} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma} = \alpha \mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_0 \\ \mathbf{f}(\boldsymbol{\sigma}) \leq \mathbf{0} \end{cases} \end{aligned} \quad (1)$$

ここで \mathbf{B} はつりあい式(あるいは変位と速度の関係)を記述するマトリクス、 \mathbf{f} 、 $\boldsymbol{\sigma}$ はそれぞれ降伏関数、応力を表すベクトルである。この問題を解けば崩壊荷重と崩壊メカニズム、崩壊時の応力が得られる。

3. アダプティブ法の適用

本研究では四角形要素による離散化を行う。要素の再分割は、各辺の midpoint を結び4分割する。また、1要素の節点数は最大で8要素となるよう分割する。再分割を行う判定基準は、「系全体のエネルギー消散率から計算される1要素あたりの平均的なエネルギー消散率」よりも「1要素のエネルギー消散率」が大きいこととする。つまり、

$$\int_{S_e} \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \cdot \boldsymbol{\sigma} dS > \frac{1}{N_e} \int_S \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \cdot \boldsymbol{\sigma} dS \quad (2)$$

なる関係を満たす要素に対して分割を行う。 S 、 S_e はそれぞれ系全体の面積、要素 e の面積である。 $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}$ はひずみ速度ベクトルである。 N_e は全体の要素数である。

4. 形状関数

西藤・小林の手法では4節点アイソパラメトリック要素を用いて、要素内で自然座標系に関して線形となる応力を定義している。要素内の積分は $4(2 \times 2)$ 点で数値積分している。本報では、1節点あたり最大8節点を含むため、自然座標系に関して2次関数となる表現される応力を用いる。また、要素内の積分は $9(3 \times 3)$ 点で数値積分している。これにより、アワグラスモードを回避している。

キーワード 極限解析, 有限要素法, アダプティブ法

連絡先 〒615-8540 京都府京都市西京区京都大学桂 C 京都大学大学院工学研究科

5. スリット付き平板の一軸引張り問題

図-2 に示すように、スリットのある平板に対して一軸引張り荷重を作用させた。降伏基準として、von-Mises の降伏関数を用いている。初期のメッシュは図-3 に示すように粗い2×2のメッシュを用いた。メッシュの細分化は5段階まで行い、最終的に64×64に相当するメッシュまで区切った。また、比較のため、あらかじめ10×10, 64×64に要素分割したメッシュを用いた。数値計算により得られた極限荷重 q_c を理論解 q^* で除した値を表-1 に示す。解析の結果、あらかじめ細かくした場合(64×64)と本手法を用いた場合でほぼ同じ値が得られた。それぞれの場合における相当塑性ひずみ速度の分布の様子を図-4, 5, 6 に示す。

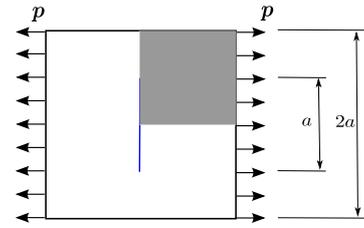


図-2 スリット付き平板の一軸引張り問題

メッシュ	極限荷重
10 × 10	1.109
64 × 64	1.017
アダプティブ法	1.016

6. 有円孔平板の一軸引張り問題

図-7 に示すように有円孔平板の一軸引張り問題にアダプティブ法を適用した。降伏基準は、前問同様、von-Mises の降伏関数を用いる。この問題では円孔の境界が曲率を有している。円孔に面した要素を再分割した場合には、要素の形状を変化させ、その要素の節点を円孔上に移動させる。

初期のメッシュは図-8 に示すように粗いメッシュを用いた。メッシュの細分化は4段階まで行った。比較のため、あらかじめ4段階細分化後に相当するメッシュで領域全体を区切った解析を行った。正解の値0.800に対して、あらかじめ細かい要素分割をした場合は0.799, 本手法を用いた場合は0.789となった。ともに正解に近い値が得られており、工学的には問題ないが、2つの数値解析結果の差は少なくないため、差が生じる原因について調べる必要がある。相当塑性ひずみ速度の分布を図-9, 10 に示す。

7. 結論

解析領域全体を細かく要素分割する場合と比べ、アダプティブ法を適用した本手法を用いると、短い時間で計算可能であり、かつ解も良好な一致を示していることを確認した。今後の課題として、メッシュ再分割の判定基準を適切に選ぶことが挙げられる。

参考文献

- 1) Borges, L., Zouain, N., Costa, C. and Feijóo, R. : An adaptive approach to limit analysis *International Journal of Solids and Structures*, Vol.38, No.10-13, pp. 1707-1720, 2001.
- 2) 西藤 潤, 小林 俊一 : 混合型剛塑性有限要素解析におけるアワグラス・ロッキング制御について, 土木学会論文集 A2(応用力学), Vol.67, No.1, pp.1-12, 2011.

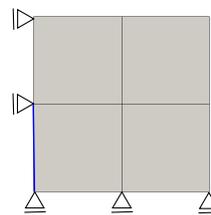


図-3 初期のメッシュ

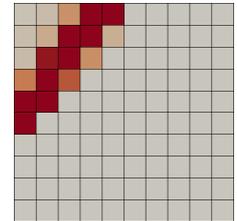


図-4 10×10 メッシュ

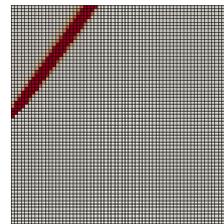


図-5 64×64 メッシュ

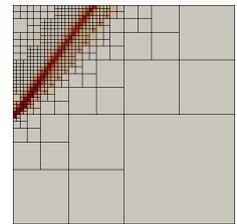


図-6 本手法

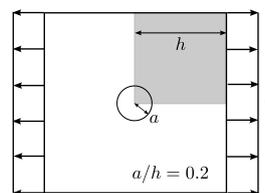


図-7 有円孔平板の一軸引張り問題

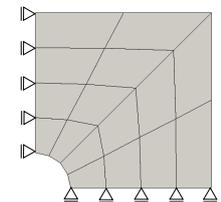


図-8 問題に用いたメッシュ

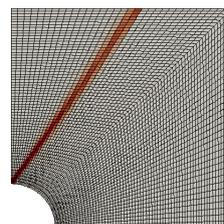


図-9 細かいメッシュ

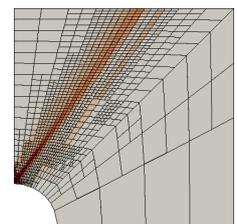


図-10 本手法