

時間・境界上の離散化に Haar wavelet を用いた拡散問題 時間域 BEM における係数行列計算の効率化

新潟大学 学生員 佐藤鉄太郎
新潟大学 正会員 紅露一寛
新潟大学 正会員 阿部和久

1. はじめに

これまで、大規模問題への適用が困難と考えられてきた境界要素法 (BEM) にとって、高速多重極展開法¹⁾や wavelet 法^{2),3),4)}などの高速化・効率化手法の開発は、実用化の上で大きなブレイクスルーとなり得る。Wavelet 法は wavelet 基底のゼロモーメント性を活用して得られる係数成分を多数生み出し、切り捨てを実行することで係数行列をスパース化する方法である。著者らはこれまで、拡散問題の時間域 BEM において、時空の離散化に Haar wavelet を用いる手法を開発したが、保存性分数の削減を計算時間の大幅な短縮が課題となっていた⁵⁾。

そこで本研究では、当該手法の離散化においては、時間領域における基底関数の組み合わせによって同一係数成分が存在するとことを明らかにした上で、その性質を活かした解析アルゴリズム適用時の計算効率について検討する。

2. 時間・境界上の離散化に Haar wavelet を用いた拡散問題時間域 BEM

本研究では、2 次元拡散問題の時間域境界要素解析を対象とする。この場合、時間域積分方程式は次式で与えられる。

$$c(\xi, \tau)u(\xi, \tau) + k \int_0^\tau \int_\Gamma q^*(x, t; \xi, \tau)u(x, t)d\Gamma_x dt - k \int_0^\tau \int_\Gamma u^*(x, t; \xi, \tau)q(x, t)d\Gamma_x dt = 0 \quad (1)$$

ここで、 $x, \xi \in \Gamma$ (Γ : 境界) とし、式 (1) においては初期条件として $u(x, 0) = 0$ (in Ω) (Ω : 領域), 境界条件として $u = \bar{u}$ (on Γ_u), $q = \bar{q}$ (on Γ_q) (Γ_u, Γ_q : Γ の部分境界) を仮定している。また、 u はポテンシャル, $q = \partial u / \partial n$, n は外向き法線方向, $u^*, q^* = \partial u^* / \partial n$ は基本解であり, k は拡散係数である。

式 (1) を離散化するにあたり、式中の u, q を時空の領域 $\Gamma \times \mathcal{T}$ ($\mathcal{T} = \{t \mid 0 \leq t \leq \bar{\tau}\}$, $\bar{\tau}$: 既知) で定義される 2 次元 wavelet 級数で近似する。その結果得られる式 (1) の残差に対し時空の Galerkin 法を適用すると、次式の連立一次方程式を得る。

$$HU = GQ \quad (2)$$

なお、 U, Q は u, q の展開係数から成るベクトルであり、係数行列 G, H の成分は、近似基底の組合せが $w_i(\xi), \chi^{(I)}(\tau)$,

$w_j(x), \chi^{(J)}(t)$ となるものにおいては、

$$\begin{aligned} g_{ij}^{(I,J)} &:= \int_0^{\bar{\tau}} \int_\Gamma \chi^{(I)}(\tau)w_i(\xi) \\ &\quad \cdot \int_0^{\bar{\tau}} \int_\Gamma k u^* \chi^{(J)}(t)w_j(x)d\Gamma_x dt d\Gamma_\xi d\tau \\ h_{ij}^{(I,J)} &:= \int_0^{\bar{\tau}} \int_\Gamma c(\xi, \tau)\chi^{(I)}(\tau)w_i(\xi) \\ &\quad \cdot \chi^{(J)}(\tau)w_j(x)d\Gamma_\xi d\tau \\ &\quad + \int_0^{\bar{\tau}} \int_\Gamma \chi^{(I)}(\tau)w_i(\xi) \\ &\quad \cdot \int_0^{\bar{\tau}} \int_\Gamma k q^* \chi^{(J)}(t)w_j(x)d\Gamma_x dt d\Gamma_\xi d\tau \end{aligned} \quad (3)$$

で与えられる。なお、本手法では、式 (8) の行列成分を切り捨てることで、解析時の使用メモリの削減を図る。切り捨て手法の詳細は文献⁵⁾を参照されたい。

3. 時間領域における基底関数の組み合わせと係数行列成分との関係

以下では、当該問題においては、時間についての基底の組合せによって大きさが同一となる係数成分が存在することを示す。基本解の性質から、係数計算においては次式の形の二重積分を計算する必要がある。

$$(\chi^{(I)}, \chi^{(J)})_f := \int_0^{\bar{\tau}} \chi^{(I)}(\tau) \cdot \int_0^{\bar{\tau}} \chi^{(J)}(t)f(\tau - t)H(\tau - t)dtd\tau \quad (4)$$

なお、 f は積分核, H は Heaviside 関数である。以下では $\chi^{(I)}, \chi^{(J)}$ は Haar scaling 関数 ϕ , または Haar wavelet $\psi^{(\lambda, \beta)}$ で与えられるものとする。

(1) $\chi^{(I)} = \phi, \chi^{(J)} = \phi$ のとき

Haar wavelet を基底関数として用いる場合、scaling 関数は時間領域 $\mathcal{T}$ において 1 個配置すれば良い。ここでは scaling 関数を 1 個用いた場合について考えると、この組合せの下では係数成分は 1 個しか存在しない。そのため、この係数の計算は省略できない。

(2) $\chi^{(I)} = \phi, \chi^{(J)} = \psi^{(\lambda, \beta)}$ のとき

この場合、次式が成り立つ。

$$(\phi, \psi^{(\lambda, \beta)})_f = -(\psi^{(\lambda, 2^{\lambda+1}-\beta)}, \phi) \quad (5)$$

そのため、基底が ϕ および階層 λ の wavelet ψ からなる係

Key Words: 2 次元拡散問題, 時間域境界要素法, Haar wavelet, 計算効率

〒 950-2181 新潟県新潟市西区五十嵐二の町 8050 番地 TEL (025) 262-7274 FAX (025) 262-7274

数行列ブロックの全ての成分 (2^λ 個) の計算が必要となる。

(3) $\chi^{(I)} = \psi^{(\Lambda, B)}, \chi^{(J)} = \phi$ のとき

この組み合わせの係数は、式 (5) より計算の必要がない。

(4) $\chi^{(I)} = \psi^{(\Lambda, B)}, \chi^{(J)} = \psi^{(\lambda, \beta)}$ のとき

この場合、基底のサポート位置の同一性から、基底の階層レベル Λ と λ の大小関係に応じて次式が成り立つ。

• $\Lambda > \lambda$ のとき

$$(\psi^{(\Lambda, B)}, \psi^{(\lambda, \beta)})_f = (\psi^{(\Lambda, B+2^{\Lambda-\lambda}\gamma)}, \psi^{(\lambda, \beta+\gamma)})_f \quad (6)$$

• $\Lambda < \lambda$ のとき

$$(\psi^{(\Lambda, B)}, \psi^{(\lambda, \beta)})_f = (\psi^{(\Lambda, B+\gamma)}, \psi^{(\lambda, \beta+2^{\lambda-\Lambda}\gamma)})_f \quad (7)$$

• $\Lambda = \lambda$ のとき

$$(\psi^{(\Lambda, B)}, \psi^{(\lambda, \beta)})_f = (\psi^{(\Lambda, B+\gamma)}, \psi^{(\lambda, \beta+\gamma)})_f \quad (8)$$

式 (6)~(8) のほかに、因果律の要請から 0 となる係数が存在することを考慮すると、基底の階層が Λ, λ なる係数ブロックの全成分数 $2^{\Lambda+\lambda}$ 個のうち、計算が必要なのはそれぞれ 2^Λ 個 ($\Lambda > \lambda$)、 2^λ 個 ($\Lambda \leq \lambda$) となる。

(5) 保存・計算が必要な成分数

解析において、境界上および時間の領域での基底の総数がそれぞれ $N_b, N_t = 2^{M+1}$ (M : 最高階層) と仮定するとき、保存・計算が必要な係数成分の総数を $\mathcal{N}(A)$ (A : G または H 行列) で表すと、次式で評価できる。

$$\mathcal{N}(A) = 2N_b^2[2 + N_t(\log_2 N_t - 1)] > N_t \cdot N_b^2 \quad (9)$$

以上の結果から、当該手法では切り捨てを実行しない限り、従来法で必要となる係数行列成分より少数で解析を実行することができない。

4. 計算効率の検討

前節の性質を考慮したアルゴリズムの下で解析を実行し、特に切り捨て実行時の計算効率について検討する。解析は図-1 の条件の下、 $N_b = 64, N_t = 32$ ($M=4$), $\bar{\tau} = 0.32$ として離散化を行なった。

表-1 に係数行列の圧縮率 ($100(\%) \times \text{保存成分数} / (N_b^2 \cdot N_t)$) を示す。前節の性質を活用することで、当該自由度では文献⁵⁾の場合の 30~40%の保存成分数に抑えることができる。式 (9) を考慮すると、 M を大きく設定するほど保存成分数の削減効果が顕著となる。しかし、一般的な時間域 BEM では 100%以下となるにも関わらず、本手法において圧縮率が 100%以下となるのは切り捨て基準値を過大に設定した場合に限定されることから、一般的な時間域 BEM 解析を上回るほどのメモリ削減の実効性は期待できないと思われる。

次に、計算時間を表-2 に示す。なお、表中“ FWT ”は、時間積分計算の一部を高速 wavelet 変換 (FWT) で処理した

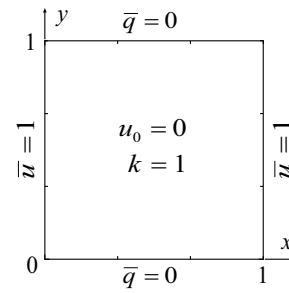


図-1 初期条件と境界条件.

表-1 係数行列の圧縮率 (%) .

切り捨て基準値	本手法	文献 ⁵⁾
1×10^{-3}	40.155	114.835
1×10^{-4}	133.411	325.510
1×10^{-5}	290.872	677.328
1×10^{-6}	500.333	1161.874
1×10^{-7}	677.750	1629.236
0	809.375	2053.125

表-2 計算時間 (sec) .

切り捨て基準値	本手法	文献 ⁵⁾	FWT
1×10^{-3}	2921.82	4032.81	555.063
1×10^{-4}	4283.75	5967.98	536.297
1×10^{-5}	5560.59	8067.91	537.437
1×10^{-6}	6565.49	10109.26	537.531
1×10^{-7}	7152.61	11515.93	544.359
0	7378.98	12249.58	552.609

場合の結果である。本研究で示した係数計算アルゴリズムを適用することで、計算時間は文献⁵⁾の 60~70%に抑えられている。しかし、FWT 適用時には及ばず、一般的な時間域 BEM(4.95sec)、wavelet BEM(空間のみ, 15.23sec) と比べても計算時間は過大となっている。この原因としては、係数成分の事前評価が適切に機能していないことや、二重の時間積分計算の非効率も原因として考えられる。そのため、今後は、上述の係数計算アルゴリズムへの FWT の導入や、係数成分の事前評価精度の検証・改善に取り組み、一層の計算時間の短縮に取り組みたい。

参考文献

- 1) Nishimura, N.: Fast multiple accelerated boundary integral equation methods. *Appl. Mech. Rev.*, Vol.55, No.4, pp.299-324, 2002.
- 2) Beylkin, G., Coifman, R. & Rokhlin, V.: Fast wavelet transforms and numerical algorithms I. *Comm. Pure Appl. Math.*, Vol.44, pp.144-183, 1991.
- 3) Koro, K., Abe, K.: Non-orthogonal spline wavelets for boundary element analysis. *Engrg. Anal. Bound. Elems.*, Vol.25, pp.149-164, 2001.
- 4) Barmada, S.: Improving the performance of the boundary element method with time-dependent fundamental solutions by the use of a wavelet expansion in the time domain. *J. Numer. Meth. Engrg.*, Vol.71, pp.363-378, 2007.
- 5) 紅露一寛, 佐藤鉄太郎, 阿部和久: 時間・空間の離散化に wavelet 基底を用いた境界要素法による線形拡散解析. 計算数理工学論文集, Vol.10, pp.81-86, 2010.