

トンネル覆工の損傷成長モデルの提案

東京都市大学 正会員 ○丸山 収・須藤敦史

京都大学 非会員 田中泰明

(独) 土木研究所寒地土木研究所 正会員 佐藤京・西弘明

1. はじめに

本研究では北海道内の山岳トンネルを対象として、供用期間中のトンネル点検データより得られた情報をもとに覆工コンクリートの劣化過程モデルを構築して、劣化予測を行うことを目的としている。劣化予測モデルとしては、複合 Poisson 過程を外乱とする確率微分方程式を定式化して、実観測値をもとにモデルのパラメータを同定し、予測式の精度を検証する。

2. 劣化過程モデルの定式化¹⁾

時刻 t における損傷度 $X(t)$ の平均的時間成長が次式で表されるとする。

$$dX(t)/dt = \mu_0(t)g(X(t)) \quad (1)$$

ここで、 $g(x)$ は、損傷度が x のときに損傷成長速度を与える形状関数であり、 $\mu_0(t)$ は平均的時間成長(ドリフト)係数である。損傷成長の不規則性は、時間成長係数 $\mu_0(t)$ の不規則変動により誘発されるものとして、次式で記述されるものとする。

$$dX(t)/dt = \{\mu_0(t) + Z(t)\}g(X(t)) \quad (2)$$

ここで、 $Z(t)$ は駆動雑音であり平均が 0 の確率過程である。式(2)を伊藤型確率微分方程式と解釈すると次式を得る。

$$dX(t) = \mu_0(t)g(X(t))dt + g(X(t^-))dZ(t) \quad (3)$$

ここで、 $X(t^-)$ は $X(t)$ の左連続変形であり、 $Z(t)$ の不連続挙動が現れる場合に対応するための表現である。

式(3)から以下に示すように各種の確率微分方程式を誘導することが出来、本研究でも損傷度の Poisson 型時間成長基本式を定式化することとする。初めに提案式のパラメータを推定する際に必要となる算術ブラウン運動モデル、幾何ブラウン運動モデルを誘導し、基本的な性質について記述する。

2.1 算術ブラウン運動モデル

初めに、 $g(x) = 1$ として駆動雑音 $Z(t)$ が、次式で与えられる場合を考える

$$Z(t) = \sigma_0 B(t) \quad (4)$$

ここで、 σ_0 は正定数、 $B(t)$, $(0 \leq t < \infty)$ は、 $B(0) = 0$, 任意の $0 \leq s < t < \infty$ において、 $B(t) - B(s)$ が、 $N(0, t-s)$ である独立増分な標準 Wiener 過程である。

式(3)に、式(4)の駆動雑音を用いると次式の算術ブラウン運動モデルが得られる。

$$dX(t) = \mu_0(t)dt + \sigma_0 dB(t) \quad (5)$$

ここで、 σ_0 はボラティリティである。式(5)の解は、 $\mu_0(t) = \mu_0$ と定数とすると次式で与えられる。

$$X(t) = X(0) + \mu_0 t + \sigma_0 B(t) \quad (6)$$

すなわち、初期値 $X(0) = x$ が与えられると、 $X(t)$ は、 $N(x + \mu_0 t, \sigma_0^2 t)$ に従い、算術ブラウン運動の平均値と分散値は、時間 t の線形関数である。また、算術ブラウン運動モデルは、損傷度の値が負の値となることを許容するモデルである。

2.2 幾何ブラウン運動モデル

次に、 $g(x) = x$ として、式(3)に、式(4)の駆動雑音を用いると幾何ブラウン運動、数理ファイナンスの分野では Black-Scholes モデルと呼ばれる次式となる。

$$dX(t) = \mu_0(t)X(t)dt + \sigma_0 X(t)dB(t) \quad (7)$$

$\mu_0(t) = \mu_0$ とすると、式(7)の解は次式で与えられる。

$$X(t) = X(0)\exp\{(\mu_0 - 0.5\sigma_0^2)t + \sigma_0 B(t)\} \quad (8)$$

幾何ブラウン運動モデルによる損傷度の時間成長過程 $X(t)$ は、対数正規分布に従い、平均値と分散値は以下のように与えられる。

$$E[X(t)] = X(0)\exp\{\mu_0 t\} \quad (9)$$

$$\text{Var}[X(t)] = X(0)^2 \exp\{2\mu_0 t\}(\exp\{\sigma_0^2 t\} - 1) \quad (10)$$

以上より、幾何ブラウン運動 $X(t)$ の対数変換 $\log X(t)$ は、算術ブラウン運動となることがわかる。

算術ブラウン運動モデルおよび幾何ブラウン運動モデルでは、損傷度の時間成長は連続となるものの、駆動雑音である Wiener 過程の性質から、そのサンプルパスは増加と減少を繰り返しながら成長する挙動を示す。したがって、損傷度が補修等の人為的な操作無しに減少することは一般にあり得ないために、サンプルパス

キーワード: トンネル覆工, 維持管理, 確率微分方程式

連絡先: 〒158-8557 世田谷区玉堤 1-28-1 TEL 03-5707-0104, E-mail: omaruya@tcu.ac.jp

の挙動としては、算術ブラウン運動モデルおよび幾何ブラウン運動モデルの適用には問題が残る。本研究では、形状関数を $g(x) = x$ として議論するが、妥当性については、参考文献 2) に委ねる。

2.3 Poisson 型モデル

本研究では、複合 Poisson 過程を不規則な損傷度成長の駆動雑音として用いるモデルの検討を行う。複合 Poisson 過程 $C(t)$ は、 $N(t)$ を強度 λ の Poisson 過程、 $\{Y_k\}_{k=1,2,\dots}$ はお互いに独立で、同一分布に従うものとして、次式で与えられる。

$$C(t) = \sum_{k=1}^{N(t)} Y_k \quad (11)$$

複合 Poisson 過程において、 $E[Y_k] = q_1$ とすると平均は次式で与えられる。

$$E[C(t)] = \lambda q_1 t \quad (12)$$

したがって、平均値が 0 である駆動雑音を $Z(t) = C(t) - \lambda q_1 t$ として、Poisson 型モデルを得る。

$$dX(t) = \{\mu_0(t) - \lambda q_1\} X(t) dt + X(t^-) dC(t) \quad (13)$$

本研究では、上記 Poisson 型モデルを損傷度予測の基本式として提案する。 $\mu_0(t) = \mu_0$ とすると Poisson 型モデルの解は、次式となる。

$$X(t) = X(0) \exp\{(\mu_0 - \lambda q_1)t\} \prod_{k=1}^{N(t)} (1 + Y_k) \quad (14)$$

また、 $X(t)$ の確率密度関数はたたみ込み積分を含んだ関数形となるが、平均値と分散値は次式となる。

$$E[X(t)] = X(0) \exp\{\mu_0 t\} \quad (15)$$

$$\text{Var}[X(t)] = X(0)^2 \exp\{2\mu_0 t\} (\exp\{\lambda q_2 t\} - 1) \quad (16)$$

$q_2 = E[Y_k^2]$ はジャンプの 2 次モーメントである。

ここで、 Y_k の確率密度関数 $f_Y(y)$ が、平均値 ν の指数分布に従うものとする。

$$f_Y(y) = (1/\nu) \exp(-y/\nu) \quad (17)$$

この仮定の下で、 $q_2 = E[Y_k^2] = 2\nu^2$ となる。

3. 劣化過程モデルのパラメータ推定と解析例

本研究で定式化した Poisson 型モデルのパラメータは以下の手順によって推定することができる。

幾何ブラウン運動モデルと Poisson 型モデルにおけるドリフト μ_0 は共通の値であるので、幾何ブラウン運動の対数変換が算術ブラウン運動過程となることを用いて、ドリフト μ_0 およびボラティリティ σ_0 を求めることを行う。式(8)の両辺の自然対数をとる。

$$\log X(t) = \log X(0) + (\mu_0 - 0.5\sigma_0^2)t + \sigma_0 B(t) \quad (18)$$

$\log X(t)$ は、算術ブラウン運動過程となるので、初期損傷度 $X(0)$ が確率変数であるとする平均値と分散値は時間 t に線形な関数として与えられる。

$$E[\log X(t)] = E[\log X(0)] + (\mu_0 - 0.5\sigma_0^2)t \quad (19)$$

$$\text{Var}[\log X(t)] = \text{Var}[\log X(0)] + \sigma_0^2 t \quad (20)$$

実データから、直線回帰により $\log X(t)$ の平均値と分散値の時間変化直線、それぞれ $m(t)$ および $v(t)$ が求められている場合に、回帰係数を求めることを行う。

$$m(t) = a_1 + b_1 t \quad (21a), \quad v(t) = a_2 + b_2 t \quad (21b)$$

式(21a,21b)と式(19)および式(20)の関係より、ドリフト μ_0 およびボラティリティ σ_0 を求めることが出来る。

式 (9), (10) および式(15), (16)から、 $\sigma_0^2 = \lambda q_2$ となる。また、 Y_k の確率密度関数を指数分布と仮定していることから、平均値 $\nu = \sigma_0 / \sqrt{2\lambda}$ を求めると、 Y_k のジャンプの 2 次モーメント $q_2 = 2\nu^2$ を算出できる。

以下に、解析例を図示するが Poisson 過程： $N(t)$ の強度 λ は外挿的に与える必要がある。図-1 に強度 $\lambda = 0.1$ として推定されたパラメータを Poisson 型モデル与え、シミュレートされた 20 ケースの損傷度成長過程と実トンネルより得られた損傷度を示している²⁾。

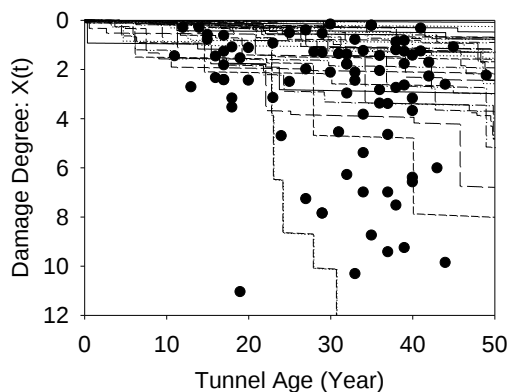


図-1 劣化過程のシミュレーション

図-1 に示した実トンネルの損傷度は、トンネル供用中に実施された過去の強度回復に関する補修・補強の影響を除去したものであるが、提案するモデルは十分に実挙動を再現していると思われる。

参考文献 1. H. Tanaka, O. Maruyama, A. Sutoh: Probabilistic Model for Damage Accumulation in Concrete Tunnel Lining and its Application to Optimal Repair Strategy, ICASP11, (accepted).
2. 須藤・近野・丸山・佐藤・西: 寒冷地トンネルの覆工における劣化過程の同定と長期予測, 土論集 F1 (トンネル工学) 特集号 Vol.66, No.1/pp.61-68, 2010.11.