剛塑性構成式を用いた土構造物の動的有限変形解析の試み

長岡技術科学大学　学生会員　○保科　隆
長岡技術科学大学　正会員　大塚　悟, 磯部　公一

１．背景

巨大地震に対する土構造物等の設計法において，残留変形量による安定性照査の必要性が高まっている．弾塑性動的変形解析は強力な解析ツールであるが，地盤調査の制約や土質材料のばらつき，大変形解析への対応を考慮すると，*Newmark* 法のような簡便解析の適用性も工学的に期待される現状がある．しかし，*Newmark* 法は様々な問題点を有することから，本研究では同様の解析手法である，剛塑性構成式を用いた動的変形解析手法の開発を行う．有限変形理論に基づく定式化を行い，土構造物の様々なレベルの残留変形量に関する解析的評価を目的とする．

２．解析手法

2.1　地盤材料の剛塑性構成式

著者らは田村らの所論に従い，*Drucker-Prager* 型の降伏関数に対して剛塑性構成式を以下のように誘導している．降伏関数を応力の第一不変量 I_1，偏差応力の第二不変量 J_2 を用いて次式のように表す．ω, ψ は *Mohr-Colomb* の破壊基準に基づく c, ϕ と関係付けられる係数であり，引張応力を正と定義している．

$$f(\boldsymbol{\sigma}) = \omega I_1 + \sqrt{J_2} - \psi = 0 \tag{1}$$

物体の応力$\boldsymbol{\sigma}$を，塑性ひずみ速度から求められる決定応力$\boldsymbol{\sigma}^{(1)}$と求められない非決定応力$\boldsymbol{\sigma}^{(2)}$に分解する．決定応力$\boldsymbol{\sigma}^{(1)}$は関連流れ則を用いて式(2)のように表し，非決定応力$\boldsymbol{\sigma}^{(2)}$は塑性ひずみ速度に関する条件（体積変化特性）である式(3)と不定定数αを用いて式(4)のように表す．$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p$ は塑性ひずみ速度，$\dot{e}$ は等価塑性ひずみ速度，$\dot{\varepsilon}_v^p$ は塑性体積ひずみ速度，$\mathbf{I}$ は単位テンソルを表す．

$$\boldsymbol{\sigma}^{(1)} = \frac{\psi}{\sqrt{3\omega^2 + 1/2}}\frac{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p}{\dot{e}}, \quad \dot{e} = \sqrt{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p} \tag{2}$$

$$h(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p) = \dot{\varepsilon}_v^p - \frac{3\omega}{\sqrt{3\omega^2 + 1/2}}\dot{e} = \dot{\varepsilon}_v^p - \beta\dot{e} = 0 \tag{3}$$

$$\boldsymbol{\sigma}^{(2)} = \alpha\frac{\partial h}{\partial \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p} = \alpha\left\{\mathbf{I} - \frac{3\omega}{\sqrt{3\omega^2 + 1/2}}\frac{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p}{\dot{e}}\right\} \tag{4}$$

式(2)，式(4)より剛塑性構成式は次式になる．また，本研究では解析速度の高速化を目的に制約条件をペナルティ法によって陽に取り組む方法を用いる（κ：ペナルティ定数）．

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\psi}{\sqrt{3\omega^2 + 1/2}}\frac{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p}{\dot{e}} + \kappa\left(\dot{\varepsilon}_v^p - \beta\dot{e}\right)\left\{\mathbf{I} - \frac{3\omega}{\sqrt{3\omega^2 + 1/2}}\frac{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p}{\dot{e}}\right\} \tag{5}$$

2.2　剛塑性動的変形解析の定式化

剛塑性構成式（応力～塑性ひずみ速度関係）ではひずみ速度の大きさが不定であるため，極限支持力問題においては変位速度の大きさを規定する制約条件を設ける解析手法が田村らによって提案されている．しかし，変形解析では同様の仮定を適用できないことから，本研究では運動方程式（慣性項の利用）により変位速度の大きさを規定した．

式(6)は基準配置における運動方程式であり，ρ_0，$\ddot{\mathbf{u}}$，$\boldsymbol{\pi}$ は基準配置における質量, 加速度, 公称応力であり，$\mathbf{g}$ は重力加速度を表す．

$$Div\boldsymbol{\pi} + \rho_0\mathbf{g} = \rho_0\ddot{\mathbf{u}} \tag{6}$$

運動方程式に仮想仕事の原理を適用すると，弱形式が得られ，*Updated Lagrange* 法に基づく定式化を行うと，運動方程式の弱形式は次式となる．ここに，V，s_σ は現配置における体積領域および応力境界であり，ρ，$\boldsymbol{\sigma}$，$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$ は現配置における質量, 真応力およびひずみ速度を表している．

$$\int_V \boldsymbol{\sigma} : div\delta\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}dV + \int_V \rho\ddot{\mathbf{u}}\cdot\delta\dot{\mathbf{u}}dV = \int_{S_\sigma}\mathbf{t}\cdot\delta\dot{\mathbf{u}}dS + \int_V \rho\mathbf{g}\cdot\delta\dot{\mathbf{u}}dV \tag{7}$$

式(5)に示すように，剛塑性構成式は応力履歴によらずに現配置の境界値問題にのみ依存して真応力が定まる特徴がある．剛塑性動的変形解析は式(7)に剛塑性構成式を適用することにより式(8)のように定式化される．また, 剛塑性構成式は非線形関数であることから, 式(8)は変位，変位速度，変位加速度の非線形方程式となり，繰返し計算が必要になるため，本解析では直接代入法による解析を実施する．また，式(8)には未知数の変位加速度と変位速度が含まれるため，本解析手法では *Wilson* のθ法を用いた陰解法を適用する．

キーワード　残留変形，剛塑性構成式，支持力問題，有限変形，動的変形解析
連絡先　〒940-2188 新潟県長岡市上富岡町 1603－1　長岡技術科学大学 環境・建設系 環境防災研究室

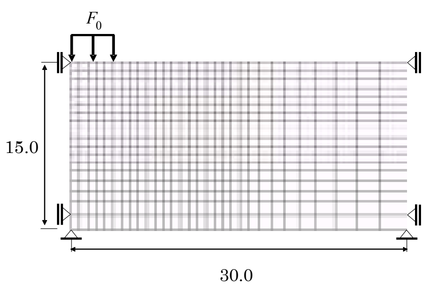
$$
\begin{aligned}
&\int_V \left[\frac{\psi}{\sqrt{3\omega^2+1/2}} \frac{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p}{\dot{e}} \right] : div\delta\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} dV \\
&+\int_V \left[\kappa\left(\dot{\varepsilon}_v^p - \beta\dot{e}\right)\left\{ \mathbf{I} - \frac{3\omega}{\sqrt{3\omega^2+1/2}} \frac{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p}{\dot{e}} \right\} \right] : div\delta\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} dV \\
&= \int_{S_\sigma} \mathbf{t}\cdot\delta\dot{\mathbf{u}} dS + \int_V \rho\mathbf{g}\cdot\delta\dot{\mathbf{u}} dV - \int_V \rho\ddot{\mathbf{u}}\cdot\delta\dot{\mathbf{u}} dV \\
&\qquad\qquad for \quad \forall\delta\dot{\mathbf{u}}
\end{aligned} \tag{8}
$$

3．水平地盤の極限支持力解析

図−1 の水平地盤モデルおよび**表−1** の解析条件に対して，極限支持力解析および動的変形解析を実施した．プラントルは水平地盤の極限支持力に関して理論解 $(2+\pi)c$ を示した．**表−1** から極限支持力の理論解は 102.83 kPa が得られる．剛塑性構成式を用いた極限支持力解析により得られる解析結果を**図−2** の(a)に示すが，極限支持力は 104.87 kPa であり，プラントルの理論解とほぼ同様の極限支持力と崩壊形態（破壊時の変位速度に任意時刻をかけて求めた変形図）が得られた．

図−3 に剛塑性構成式を用いた動的微小変形解析の結果（荷重〜変位加速度・変位速度・変位関係）を示す．図では載荷重が 105.0 kN に達すると変形することがわかる．**図−2**(b)〜(d)の各荷重における塑性ひずみ速度および崩壊形態を見ると，剛体領域では載荷下部に球根状の塑性ひずみ速度が発生し，荷重の増加と共にプラントルのすべり破壊形態に移行する結果が得られ，理論解にほぼ一致する極限支持力と崩壊形態が得られた．

剛塑性構成式を用いた動的有限変形解析の解析結果を**図−3**(e)〜(f)に示す．微小変形理論に基づく解析結果と類似した結果が得られていることがわかる．**図−4** に微小変形理論と有限変形理論における荷重〜変位関係の比較を示す．有限変位は微小変位に比べて多少小さくなる結果が得られた．これは土かぶり圧の増加によって，地盤のせん断抵抗力が増加したことによると考えられる．



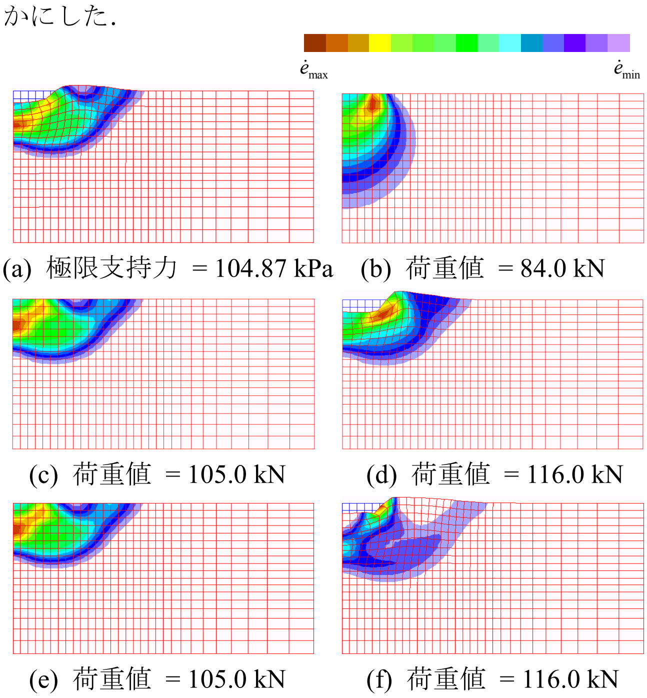
図−1　水平地盤モデル　[単位：m]

表−1　解析条件

せん断抵抗角　ϕ [°]	0.0
粘着力　c [kPa]	20.0
単位体積重量　γ_t [kN/m^3]	0.0
初期設定荷重　F_0　[kN]	20.0
荷重速度　$\dot{F}$	0.1
時間増分　Δt	10.0

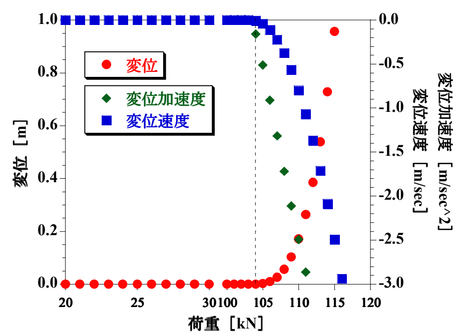
4．結論

本研究では残留変形量の予測や大変形解析において，高精度な解を求めることを目的に，剛塑性構成式を用いた動的変形解析手法を開発した．プラントルの極限支持力の変形解析により、本解析手法の適用性を明らかにした．

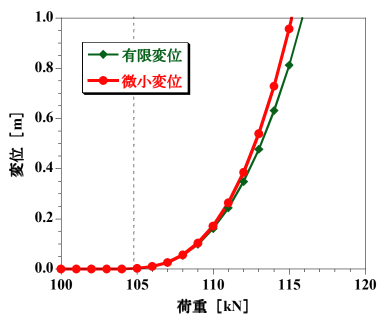


(a) 極限支持力 ＝104.87 kPa　(b) 荷重値 ＝84.0 kN
(c) 荷重値 ＝105.0 kN　(d) 荷重値 ＝116.0 kN
(e) 荷重値 ＝105.0 kN　(f) 荷重値 ＝116.0 kN

図−2　塑性ひずみ速度分布と崩壊形態



図−3　荷重−変位加速度・変位速度・変位関係



図−4　有限変位と微小変位の関係