

Modified Cam Clay 型の降伏関数を用いた弾粘塑性構成式

京都大学大学院 正会員 ○木元 小百合  
 京都大学大学院 フェロー会員 岡 二三生  
 元京都大学大学院 Karunawardena, W.A.

1. はじめに

本研究では、特異点のないModified Cam Clay<sup>1)</sup> (MCC)の降伏関数を超過応力型<sup>2)</sup>の粘塑性流れ則に適用した弾粘塑性構成式<sup>3)</sup>を導くとともに、非線形移動硬化則<sup>4)</sup>を導入して拡張した。移動硬化則の導入により、応力誘導異方性の表現および繰返し载荷への適用が可能となる。

2. 弾粘塑性構成式の定式化

粘塑性ひずみ速度  $\dot{\epsilon}_{ij}^{vp}$  はPerzyna<sup>2)</sup>による超過応力型構成式を拡張した次式で与えられる。

$$\dot{\epsilon}_{ij}^{vp} = \gamma \langle \Phi(F) \rangle \frac{\partial f_p}{\partial \sigma'_{ij}} \quad (1)$$

$$\langle \Phi(F) \rangle = \begin{cases} \Phi(F) & : F > 0 \\ 0 & : F \leq 0 \end{cases} \quad (2)$$

ここで  $\Phi(F)$  は速度依存性材料関数であり、 $F = f_y$  とする。 $F = 0$ のとき動的降伏関数は静的降伏関数  $f_y = 0$  に一致し、応力状態は静的降伏関数上にある。

本研究では、静的降伏関数  $f_y = 0$  および粘塑性ポテンシャル関数  $f_p = 0$  を以下の関数で与える。

$$f_y = \ln \left( \frac{\bar{\eta}_\chi^{*2} + M^{*2} - \chi^{*2}}{M^{*2} - \chi^{*2}} \right) + \ln \left( \frac{\sigma'_m}{\sigma'^{(s)}_{my}} \right) = 0 \quad (3)$$

$$f_p = \ln \left( \frac{\bar{\eta}_\chi^{*2} + M^{*2} - \chi^{*2}}{M^{*2} - \chi^{*2}} \right) + \ln \left( \frac{\sigma'_m}{\sigma'_{mp}} \right) = 0 \quad (4)$$

$$\bar{\eta}_\chi^* = \sqrt{(\eta_{ij}^* - \chi_{ij}^*)(\eta_{ij}^* - \chi_{ij}^*)}, \quad \chi^* = \sqrt{\chi_{ij}^* \chi_{ij}^*} \quad (5)$$

上記の関数はln関数内が正の時、MCCの楕円型関数式(6)を満足し、形状は一致する。

$$f = \frac{\bar{\eta}_\chi^{*2} + M^{*2} - \chi^{*2}}{M^{*2} - \chi^{*2}} \sigma'_m - \sigma'^{(s)}_{my} = 0 \quad (6)$$

式(3)、(4)の関数形を用いる理由はMCCの降伏関数の原形を用いると粘塑性パラメータの決定が複雑になり、2次圧密係数との対応がとれないためである。また、Wheelerらの方法(2003)<sup>5)</sup>を用い  $\chi^*$  の項を考慮することにより、限界状態での粘塑性体積ひずみ速度が

0となる。図-1に三軸応力条件で  $\chi_{11(0)} = (q/\sigma'_m)_{(0)} = 0.5$ ,  $M = \sqrt{3/2}M^* = 1.0$ とした時の静的降伏関数と粘塑性ポテンシャル関数を  $\sigma'_m - q$  平面上に示す。 $M^*$ は破壊応力比、 $\sigma'_{my}$ は等方硬化パラメータである。 $\chi_{ij}^*$ は背応力テンソルであり、硬化則として以下のArmstrong and Frederic (1966)<sup>4)</sup>による非線形移動硬化則を適用する。

$$d\chi_{ij}^* = B^* (A^* de_{ij}^{vp} - \chi_{ij}^* d\gamma^{vp}) \quad (7)$$

$B^*$ ,  $A^*$ は材料定数である。 $d\gamma^{vp}$ は粘塑性偏差ひずみ増分  $de_{ij}^{vp}$ の第二不変量である。降伏面の大きさを決定する  $\sigma'^{(s)}_{my}$  については粘塑性体積ひずみによる硬化-軟化とともに、内部構造劣化に伴う軟化を以下の式で考慮する。

$$\sigma'^{(s)}_{my} = \frac{\sigma'_{maf} + (\sigma'_{mai} - \sigma'_{maf}) \exp(-\beta z)}{\sigma'_{maf}} \cdot \sigma'_{myi} \exp \left( \frac{1+e}{\lambda-\kappa} \epsilon_v^{vp} \right) = \{n + (1-n) \exp(-\beta z)\} \cdot \sigma'_{myi} \cdot \exp \left( \frac{1+e}{\lambda-\kappa} \epsilon_v^{vp} \right) \quad (8)$$

ここで  $z$  は粘塑性ひずみ速度テンソルの第二不変量の蓄積量  $z = \int_0^t (\dot{\epsilon}_{ij}^{vp} \dot{\epsilon}_{ij}^{vp})^{1/2} dt$  である。 $n = \sigma'_{maf} / \sigma'_{mai}$ , 内部  $\beta$  は構造劣化パラメータである。

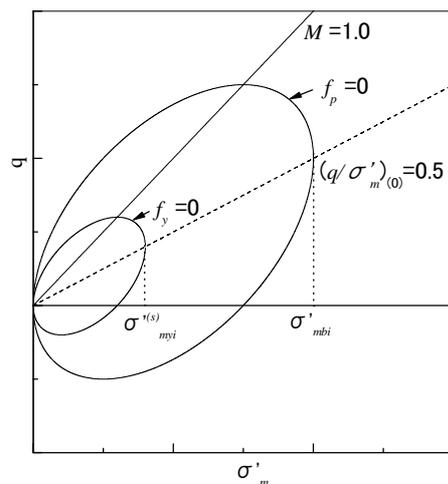


図-1 静的降伏関数と粘塑性ポテンシャル関数

速度依存性材料関数  $\Phi(F)$  は実験的に以下の関数で

キーワード：弾粘塑性構成式, 移動硬化, 修正カムクレイモデル

連絡先：〒615-8540 京都市西京区京都大学桂 京都大学大学院工学研究科社会基盤工学専攻地盤力学分野 075-383-3192

与えられる.

$$\gamma\Phi(F) = C' \sigma'_m \exp\{m'' f_y\}$$

$$= C' \sigma'_m \exp\left\{m'' \left( \ln \left( \frac{\bar{\eta}_\chi^{*2} + M^{*2} - \chi^{*2}}{M^{*2} - \chi^{*2}} \right) + \ln \left( \frac{\sigma'_m}{\sigma_{my}^{(s)}} \right) \right) \right\}$$

$$= C'' \sigma'_m \exp\left\{m'' \left( \ln \left( \frac{\bar{\eta}_\chi^{*2} + M^{*2} - \chi^{*2}}{M^{*2} - \chi^{*2}} \right) + \ln \left( \frac{\sigma'_m}{\{n + (1-n)\exp(-\beta z)\} \sigma'_{mbi}} \right) - \frac{1+e}{\lambda - \kappa} \epsilon_v^{vp} \right) \right\} \quad (9)$$

$$C'' = C' \exp\left( \ln \frac{\sigma'_{mbi}}{\sigma_{my}^{(s)}} \right) \quad (10)$$

上の式で  $m''$ ,  $C''$  は粘塑性パラメータである.

以上の式(1)~(8)より, 次の粘塑性ひずみ速度を得る.

$$\dot{\epsilon}_{ij}^{vp} = C'' \exp\left\{m'' \left( \ln \left( \frac{\bar{\eta}_\chi^{*2} + M^{*2} - \chi^{*2}}{M^{*2} - \chi^{*2}} \right) + \ln \left( \frac{\sigma'_m}{\{n + (1-n)\exp(-\beta z)\} \sigma'_{mbi}} \right) - \frac{1+e}{\lambda - \kappa} \epsilon_v^{vp} \right) \right\}$$

$$\cdot \left[ \frac{2(\eta_{ij}^* - \chi_{ij}^*)}{\bar{\eta}_\chi^{*2} + M^{*2} - \chi^{*2}} + \left( 1 - \frac{2\eta_{ij}^*(\eta_{ij}^* - \chi_{ij}^*)}{\bar{\eta}_\chi^{*2} + M^{*2} - \chi^{*2}} \right) \frac{1}{3} \delta_{ij} \right] \quad (11)$$

ここで, 等方応力状態での2次圧密速度を  $\alpha (= \Delta \epsilon_v^{vp} / \Delta \ln t)$  とすると, 時間依存性パラメータ  $m''$  と  $\alpha$  は以下の関係にある.

$$m'' = \frac{\lambda - \kappa}{1 + e} \frac{1}{\alpha} \quad (12)$$

### 3. 解析例

提案した構成式による非排水三軸試験のシミュレーションを図-2に示す. 用いた材料パラメータは表-1に示すとおりである. まず, ひずみ速度を0.5%/min, 0.05%/minとしたときのシミュレーション結果を実線と点線でそれぞれ示す. 図に示すようにひずみ速度依存性を再現することができる. 次に移動硬化パラメータ  $B^*$  を導入した場合の結果を一点鎖線で示す. 移動硬化を導入した場合, 破壊応力比に達した後, 正のダイレイタンシー挙動を示す.

表-1 材料パラメータ

パラメータ		
初期平均有効応力	$\sigma'_{m0}$	100 (kPa)
初期間隙比	$e_0$	1.727
圧縮指数	$\lambda$	0.3201
膨潤指数	$\kappa$	0.0482
初期せん断弾性係数	$G_0$	3100 (kPa)
擬似過圧密比	$\sigma'_{mbi} / \sigma'_{m0}$	1.0
粘塑性パラメータ	$m''$	23.7
粘塑性パラメータ	$C_0$	$8.0 \times 10^{-8} (1/s)$
限界状態での応力比	$M^* = A^*$	1.184
内部構造パラメータ	$\sigma'_{maf} / \sigma'_{mai}$	0.67
内部構造パラメータ	$\beta$	3
移動硬化パラメータ	$B^*$	0.4

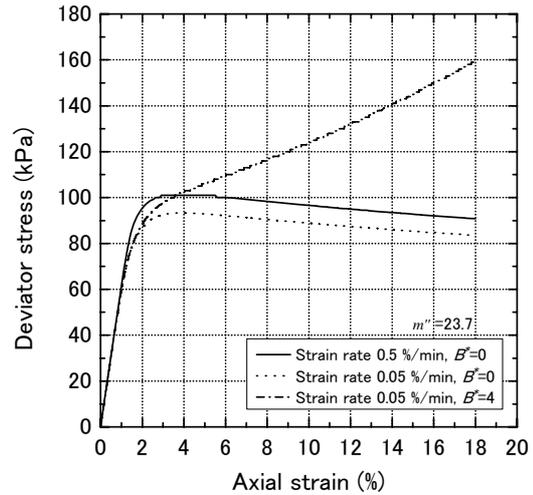


図-2(a) 応力-ひずみ関係

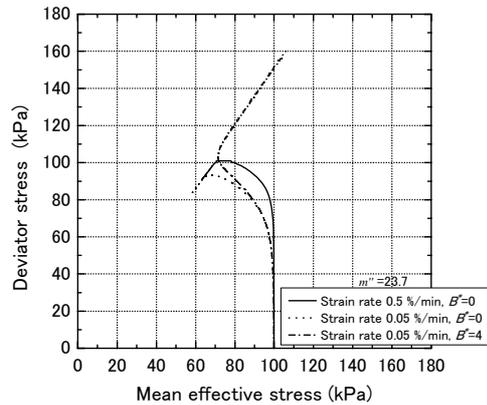


図-2(b) 有効応力径路

### 4. まとめ

本研究では, 超過応力型流れ則を用いた弾粘塑性構成式に Modified Cam Clay 型の降伏関数と粘粘塑性ポテンシャルを適用し, 移動硬化を考慮して拡張した. また提案した構成式の非排水三軸条件下での挙動について検討した.

#### 参考文献

- 1) Roscoe, K.H., and Burland, J.B.: On the generalized stress-strain behavior of 'wet clay', In Engineering plasticity, Cambridge University Press, 553-609, 1968.
- 2) Perzyna, P.: The constitutive equation for work-hardening and rate sensitive plastic materials, Proc. Vibrational Problems, Warsaw, 4, No.3, pp. 281-290, 1963.
- 3) Karunawardena, W.A.: Consolidation analysis of Sri Lankan peaty clay using elasto-viscoplastic theory, Doctoral thesis, Kyoto University, 2007.
- 4) Armstrong, P.J. and Frederick, C.O.: A mathematical representation of the multiaxial Bauschinger effect, C.E.G.B. Report RD/B/N 731, 1966.
- 5) Wheeler, S.J., Naatanen, A., Karstunen, M., Lojander, M.: An anisotropic elastoplastic model for soft clays, Canadian Geotechnical J. 40, 403-418, 2003.