

異方性不均一場における巨視的分散長の性質について

神戸大学大学院 学生会員 ○西村由紀子
 神戸大学 非会員 星野 大介
 神戸大学 正会員 齋藤 雅彦

1. はじめに

地下水汚染問題における汚染物質の移行予測等に用いられる移流分散解析では、地盤の不均一性に関する巨視的分散長を適切に与える必要があるが、この値の設定方法は確立されていない。

これに対して、西村・齋藤¹⁾は、等方性不均一場における1次元な流れ場に対して、巨視的分散長の定量的評価方法について検討し、簡潔な評価式を提案している。

本研究では、この方法を異方性不均一場に拡張し、そこから導かれる巨視的分散長を用いてその定量的評価方法に関する検討を行う。

2. 解析方法

(1) 基礎方程式の無次元化

流れ場に関する基礎方程式として、以下のように無次元化した二次元定常飽和浸透流の式(1)を用いる。

$$\frac{\partial}{\partial X} \left(K \frac{\partial H}{\partial X} \right) + \frac{\partial}{\partial Z} \left(K \frac{\partial H}{\partial Z} \right) = 0 \quad (1)$$

ここに、 $X=x/l_0$, $Z=z/l_0$, $H=h/l_0$, $K=k/k_0$ であり、 x, z は空間座標、 h はピエゾ水頭、 k は透水係数、 l_0 は長さの代表値、 k_0 は透水係数の幾何平均値とする。

また、移流分散方程式は、以下のように無次元化する。

$$\begin{aligned} & \frac{\partial C}{\partial T} + U' \frac{\partial C}{\partial X} + W' \frac{\partial C}{\partial Z} \\ &= \frac{\partial}{\partial X} \left(D_{XX} \frac{\partial C}{\partial X} + D_{XZ} \frac{\partial C}{\partial Z} \right) + \frac{\partial}{\partial Z} \left(D_{ZX} \frac{\partial C}{\partial X} + D_{ZZ} \frac{\partial C}{\partial Z} \right) \end{aligned} \quad (2)$$

ここに、 $C=c/c_0$, $T=tk_0/l_0$, $D_{XX}=d_{xx}/l_0k_0$, $D_{XZ}=d_{xz}/l_0k_0$, $D_{ZX}=d_{zx}/l_0k_0$, $D_{ZZ}=d_{zz}/l_0k_0$, $U'=u'/k_0$, $W'=w'/k_0$, $A_L=\alpha_L/l_0$, $A_T=\alpha_T/l_0$ であり、 t は時間、 c は濃度、 c_0 は濃度の代表値、 u' , w' はそれぞれ x 方向、 z 方向の実流速成分、 α_L , α_T はそれぞれ縦分散長と横分散長である。また、 d_{xx} , d_{zx} , d_{xz} , d_{zz} は分散係数テンソルの成分であり、以下のように表される。

$$\begin{aligned} d_{xx} &= \frac{\alpha_L u'^2}{\sqrt{u'^2 + w'^2}} + \frac{\alpha_T w'^2}{\sqrt{u'^2 + w'^2}}, \quad d_{zz} = \frac{\alpha_T w'^2}{\sqrt{u'^2 + w'^2}} + \frac{\alpha_L w'^2}{\sqrt{u'^2 + w'^2}}, \\ d_{xz} &= d_{zx} = \frac{(\alpha_L - \alpha_T) u' w'}{\sqrt{u'^2 + w'^2}} \end{aligned} \quad (3)$$

(2) 不均一場の生成

透水係数の不均一性を現す地盤モデルとして f^ζ 型モデル²⁾を使用する。これは、透水係数の空間的変動のパワースペクトルを式(4)のように表現するものである。

$$S(|f|) \propto |f|^{-\zeta} \quad (4)$$

ここに、 f は空間周波数ベクトル、 $S(|f|)$ はパワースペクトル密度、 ζ は空間的な相関性を表すパラメータであり、2次元モデルの場合 $\zeta=2$ とすると完全な自己相似性を有するため、解析スケールに依存しない。このため、式(1)で表されるような無次元場にもそのまま適用することができる。また、 f の成分を f_x, f_z としたとき、 x 方向と z 方向で異方性を持つ場合は、パラメータ $\alpha(0<\alpha<1)$ を導入し、空間周波数ベクトルの大きさ $|f|$ を式(5)のように修正することによって異方性を表現することができる。

$$|f| = \sqrt{f_x^2 + (\alpha f_z)^2} \quad (5)$$

また、本モデルにおける $\log K$ の分散 σ^2 は、解像度(=要素数)を n とすると、不均一性の大きさを表すパラメータ λ を使用して、以下のように解像度に応じた同質な地盤をあらわすことが可能である²⁾。

$$\sigma^2 = \lambda \log_{10} n \quad (6)$$

(3) 解析領域・境界条件と物性値

解析領域は、図-1に示すような長方形領域とする。

ここで、流れ場の境界条件は、 $Z=0$ および $Z=1$ で不透水性境界、 $X=0$ で $H=4$, $X=4$ で $H=0$, すなわち、動水勾配が1となる1次元な流れ場とする。濃度の境界条件は、 $X=0$ で $C=1$ とする。ここで、代表長さ l_0 は、汚染源の長さ(z 方向の長さ)とする。

地盤の不均一性および異方性に関しては、先に述べたパラメータ λ を0.02から0.14まで、 ω を0.1から0.9まで変化させ、それぞれの組み合わせに対して1000個の場を作成する。それぞれの分布パターンに対して濃度の時空間変化を計算し、1000回分のアンサンブル平均を求めた。図-2に作成した透水係数分布の一例を示す。

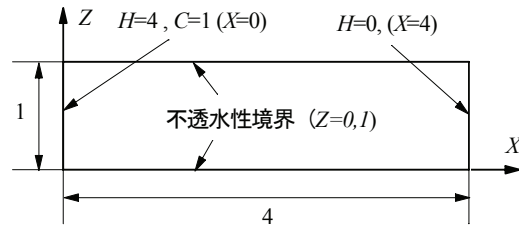


図-1 解析領域と境界条件

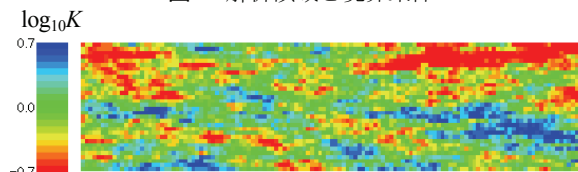


図-2 透水係数分布の一例 ($\lambda=0.04$, $\omega=0.2$)

キーワード 移流分散現象, 巨視的分散長, 異方性不均一場, 数値シミュレーション

連絡先 〒657-8501 神戸市灘区六甲台町 1-1 神戸大学工学部内 TEL 078-803-6435

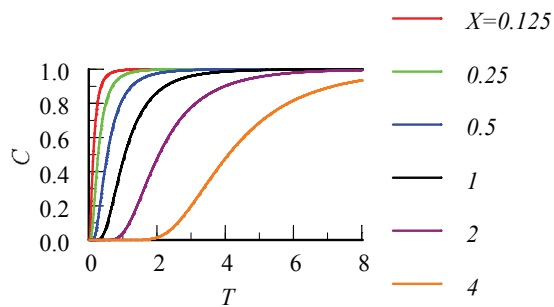
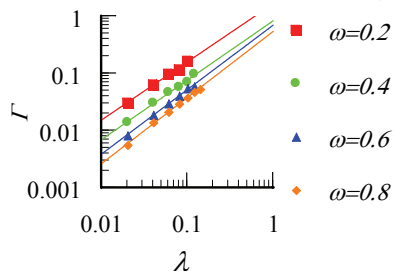
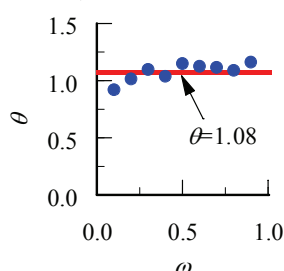
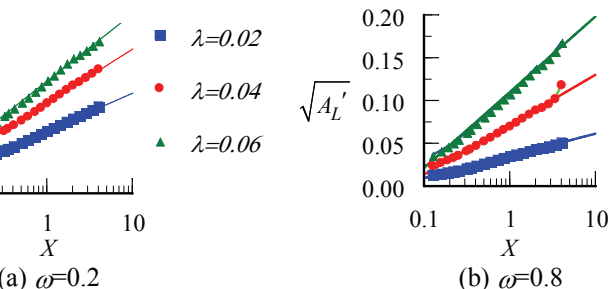
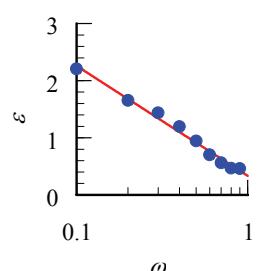
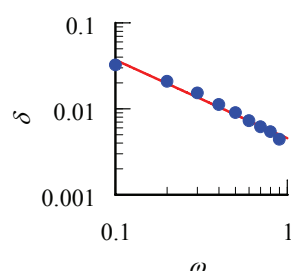
図-3 断面平均濃度の時間変化($\lambda=0.04$, $\omega=0.2$)図-5 λ と Γ の関係図-6 ω と θ の関係

図-4 巨視的分散長と流下距離の関係 (実線は回帰直線)

図-7 ω と ε の関係図-8 ω と δ の関係

3. 解析結果と考察

(1) 巨視的分散長の同定

図-3は濃度分布のアンサンブル平均から得られた得られたいくつかの断面における断面平均濃度の時間変化の一例($\lambda=0.04$, $\omega=0.2$)を示す. ここから, 以下の1次元移流分散方程式の理論解を用いて濃度 C の時間変化を再現するみかけの無次元巨視的分散長 A_L' を各断面について同定する.

$$C = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{X - U_m T}{2\sqrt{D T}} \right) + \frac{1}{2} \exp \left(\frac{U_m X}{D} \right) \operatorname{erfc} \left(\frac{X + U_m T}{2\sqrt{D T}} \right) \quad (7)$$

ここに, D は無次元の巨視的分散係数($=A_L' \cdot U_m$), U_m は X 方向の無次元実流速である.

(2) 巨視的分散長と流下距離の関係

図-4は, みかけの巨視的分散長 A_L' の平方根と流下距離 X の関係を片対数で表したものであるが, 両者の関係は概ね直線近似が可能と考えられる. すなわち, 次式のように表現される.

$$\sqrt{A_L'} = \gamma \log_{10} \left(\frac{X}{\delta} \right) \quad (8)$$

ここで, γ , δ はフィッティングパラメータであり, $\gamma^2 = \Gamma$ とおくと, 式(8)は以下になる.

$$A_L' = \Gamma \left\{ \log_{10} \left(\frac{X}{\delta} \right) \right\}^2 \quad (9)$$

(3) 不均一パラメータ λ , ω と Γ , δ の関係

式(9)におけるフィッティングパラメータ Γ および δ の λ , ω に対する依存性について考察する.

図-5はいくつかの ω に対する λ と Γ の関係を表したものである. これより, それぞれのプロットを両対数軸上で直線近似すると, 以下の式を得る.

$$\Gamma = \varepsilon \lambda^\theta \quad (10)$$

図-6および図-7は, それぞれ ω と θ および ω と ε の関係を示したものであるが, θ については ω に対する依存性は小さく, 概ね一定値とみなせること, また ε については片対数軸上で概ね直線関係と見なせることがわかる. これらをまとめると, 次式のように表現することができる.

$$\theta = 1.08 \quad (11)$$

$$\varepsilon = -1.92 \log_{10} \omega + 0.334$$

また, δ については等方性の場合と同様に²⁾, λ に対する依存性はほとんど見られなかったのに対し (ただし $\lambda < 0.08$ の場合), ω に対しては図-8に示すように以下のようなべき型の関数で近似し得ると考えられる.

$$\delta = 4.54 \times 10^{-3} \omega^{-0.911} \quad (12)$$

(4) 汚染源の大きさと巨視的分散長の関係

ここで同定された A_L' は, 汚染源長さ l_0 によって無次元化されている. したがって実スケールにおける異方性不均一場の巨視的分散長 α_L' は, 式(9)より以下のように表現できる.

$$\alpha_L' = l_0 \Gamma \left\{ \log_{10} \left(\frac{x}{l_0 \delta} \right) \right\}^2 \quad (13)$$

ここに, Γ および δ は, 式(10)~式(12)を用いて λ および ω から推定可能なパラメータである.

謝辞: 本研究は, 日本学術振興会科学研究費補助金 (基盤研究C, 研究課題名: 「山腹斜面における廃棄物の不法投棄に伴う汚染物質の拡散挙動の解明」, 課題番号: 21510031, 研究代表者: 齋藤雅彦) の支援を受けた. ここに記して謝意を表す.

参考文献

- 1) 西村由紀子, 齋藤雅彦: 一次元移流分散現象における巨視的分散長の性質に関する一考察, 土木学会第65回年次学術講演会, 2010.
- 2) 齋藤雅彦, 川谷健: 透水係数の空間分布に関する理論的考察, 土木学会論文集, No. 645/III-50, pp. 103-114, 2000.