Levy 安定分布と修正 SLSC による日降水量データの解析

三重大学大学院　フェロー　○葛葉　泰久
摂南大学（非常勤講師）　正会員　友杉　邦雄

１．目的

2011 年 3 月 11 日に東北・関東地方等を襲った東北地方太平洋沖地震に関し，「想定外」という言葉が頻繁に使われている．今後，土木工学等の分野では，想定外の規模の自然災害が生起した時の対応が，強く問われることになると考えられる．一般に，河川計画の立案に対しては，行政が「T 年確率の豪雨・洪水に対して防御を行った」とするなら，「T 年確率」より大きい規模の災害が生起した場合，それは「想定外の災害」なので，行政の責任を問うことはできない．ただし，ここで言う「想定外」は，「それ以上の規模の災害が起こることを想定していなかった」では決してなく，「それ以上の規模の災害を想定して防御することは不可能」という意味のはずである．こういう背景から，今後は，これまで以上に「T 年確率」というような概念が重要になるはずである．本報告では，従来使われてきた確率分布形と比較して裾が厚い Levy 分布（安定分布ともいう）を用い，「想定外の極値を，より想定外でないようにする」試みについて述べる．また，同時に，適合度評価によく用いられる SLSC（宝・高棹, 1988）についても若干の考察を行う．

２．Levy 分布

Levy 分布は，金融工学等で用いられているものの，陽な形での確率密度関数，確率分布関数が存在しないため，解析が困難で，日本の水工学の分野での使用実績はあまりないようである．海外では種々の分野でよく使われ，Scale 論, Multifractal 論，地震解析 (Lavallee) などで使われてきた．この分布は，特性関数が以下の式(1)のように与えられる（ただし，異なる定義も存在する).

$$\varphi(k;\alpha,\beta,\gamma,\mu)=\exp\left[\gamma\left(ik\mu-|k|^{\alpha}+ik\omega(k;\alpha,\beta)\right)\right]$$

$$\omega(k;\alpha,\beta)=\begin{cases}|k|^{\alpha-1}\beta\tan(\alpha\pi/2) & (\alpha\neq1)\\ -\beta(2/\pi)\ln|k| & (\alpha=1)\end{cases}\quad\cdots\cdots\text{(1)}$$

$$f(z;\alpha,\beta,\gamma,\mu)=(2\pi)^{-1}\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-ikz)\varphi(k;\alpha,\beta,\gamma,\mu)\mathrm{d}k\quad\cdots\cdots\text{(2)}$$

つまり，Levy 分布の確率密度関数は，上式(2)で求められる．4 つのパラメータのうち，α $(0<\alpha\leq2)$ が最も重要で，裾の形を決め，$\alpha=2$ の場合に正規分布に相当する．本稿での計算については，Nolan(1997)などを参考にした．

３．データとヒストグラム

データとして，気象庁の年最大日降水量を用いた．地点は，津，名古屋，大阪である．**図１**は，津の年最大日降水量（110 年分）をヒストグラムにし，同時に，いくつかの母数推定法により求めたパラメータのうち，最も SLSC が小さくなるものを用いた場合の確率密度関数を，赤い曲線で表している．名古屋と大阪についても，同程度によく確率密度関数がヒストグラムで表示された分布を再現している．

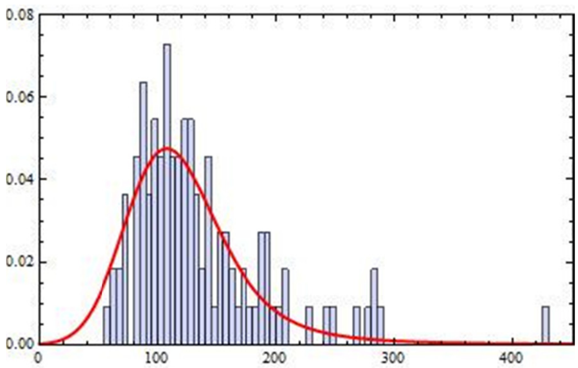

図１　津の年最大日降水量を用いて作ったヒストグラムと確率密度関数．ただし，縦軸の数字は関数の値そのものではない．

４．SLSC による適合度評価と再現期間

図２の上の図は，Levy 確率紙に津の年最大日降水量をプロットしたもので，下の図は分布形として GEV を選び，L-moment

キーワード　Levy 分布，SLSC，極値，分布の裾，日降水量，適合度
連絡先　〒514-8507　三重県津市栗真町屋町 1577 三重大学大学院生物資源学研究科水域環境学教育研究分野
Email: kuzuha@bio.mie-u.ac.jp

法で得られた母数を用いて，同じくデータをプロットしたものである．明らかに，GEV の方が適合度が良い．SLSC を求めてみると，Levy 分布が 0.043 で，GEV が 0.020 である．図 1 の右の端にプロットされているのは，2004 年の 427.0mm というデータであるが，ここで求めた Levy 分布を適用すると，このデータの再現期間は 141 年に，GEV のそれは 225 年になる（表 1）．同じく，名古屋については，SLSC がそれぞれ，0.058 と 0.060 になり，既往最大値 428.0mm の再現期間は，それぞれ 425 年，1,165 年と算定される．大阪については，SLSC が 0.028 と 0.022 で，既往最大値の再現期間は，298 年，593 年である．

以上のように，裾の厚い Levy 分布を用いた場合に，GEV より既往最大値に対応する再現期間が，顕著に小さくなることを示したが，「どちらの分布を用いるか」に対して正解はなく，計画者の思想により，水準以上の適合度を示す分布形から，一つの分布形を選ぶものである．

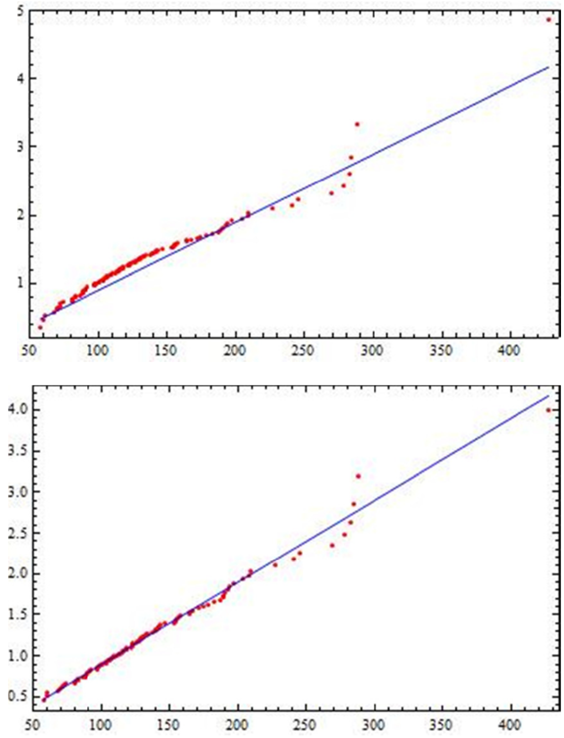

図２　確率紙上にプロットしたデータ
上が Levy で下が GEV である．横軸は降水量である．縦軸は文献を参照されたい

５．修正 SLSC

表 1 には，SLSC とともに，SLSC-2 を示した．この SLSC-2 は，以下のようにして求めた標準最小二乗規準である．通常の SLSC は，次式(3)で求める（各変数の意味は既往の文献を参照されたい）が，これ(SLSC)は極値（分布の裾の部分）を非常に重視した規準である．例えば，図２の降水量 250mm 以上の部分は直線から大きく離れているように見えるが，これは，極値の部分で直線とのかい離が強調されることを意図して SLSC が定義されているためである．計画者が，「極値を大事にする程度」を選んで SLSC を求められるように，修正 SLSC (SLSC-2) を式(4)のように考えた．式(4)の f_i は，i 番目のデータの位置での確率密度関数値である．本稿では，$\eta = 0.5$ とした．計画者が極値をどう扱いたいかによってηの正負も変わる．ただし，SLSC-2 は SLSC と同じく，適合度を相対的に評価するもので，また SLSC と SLSC-2 の値を比較することは意図していない．表 1 からわかることは，$\eta = 0.5$ とした SLSC-2 を用いても，GEV の方が Levy より適合度という観点からは成績が良い．繰り返すが，SLSC，SLSC-2 の結果を重視するか，極値の再現期間を減ずる方を選ぶかは，計画者の思想次第である．

$$SLSC = \frac{\sqrt{\sum_i \varepsilon(i)^2 / n}}{|y_{0.99} - y_{0.01}|} \quad \text{....(3)}$$

$$SLSC = \frac{\sqrt{\sum_i \varepsilon(i)^2 \omega_i / n}}{|y_{0.99} - y_{0.01}|}, \qquad \omega_i = \frac{n(f_i)^\eta}{\sum (f_i)^\eta} \quad \text{.........(4)}$$

つまり，計画者が，「確率分布の裾の部分を，この程度重視しよう」とあらかじめ決め，それに従って適合度評価ができるのが，本稿で示す修正 SLSC-2 である．

謝辞：本稿は，第 2 著者が実践水文研究会から助成していただいた「流出モデルに関する総括研究」の成果の一部である．ここに記して深謝する次第です．

参考文献：宝・高棹(1988): 土木学会論文集，No.393/II-9, pp.151-160； Nolan(1997): Stochastic Models, 13, pp.759-774 など； Lavallee (2008): Advaces in Geophysics, 50, pp.427-461, ; 葛葉(2010): 土木学会論文集, 66, pp.66-75.

表１　Levy と GEV の比較

	津	名古屋	大阪
Levy の SLSC	0.043	0.058	0.028
GEV の SLSC	0.020	0.060	0.022
Levy の SLSC-2	0.036	0.037	0.023
GEV の SLSC-2	0.008	0.018	0.012
既往最大値	427.0mm	428.0mm	250.7mm
Levy による再現期間	141 年	425 年	298 年
GEV による再現期間	225 年	1165 年	593 年