

VOF scheme を用いた Navier-Stokes 方程式に基づく Bingham 流体解析に関する研究

群馬大学大学院 学生会員 ○阿部皓平・岡田崇

群馬大学大学院 正会員 松本健作・清水義彦・若井明彦

1. 序論

破堤や地滑りのような自然災害は防ぐことが困難であり、人命だけでなく交通やインフラ設備など被害也多岐にわたる。集中豪雨発生の予測が困難なことや避難行動の遅さが原因として挙げられているが、土砂の流動に関するメカニズムが解析されていないことも大きな原因となっている。河川堤防裏法尻近傍が浸透水によって泥濘化し崩壊する浸透性破堤現象ではこの土砂の流動現象が発生するが、その進行性の破壊過程を再現可能な解析手法は未だ充分検討されていない状況にある。そこで本研究では、この土砂流動現象を再現するシミュレーション手法の開発を目的とする。土砂の流動現象はその取扱いが困難であり、Newton 流体を対象とした流体解析や地盤工学的な取扱いのみでは解析ができない。泥濘化した流体は Bingham 流体としてふるまうと見做され、土砂流動現象を表現するには Bingham 流体の解析が重要であると考えられる。

そこで、Bingham 流体表現を取り込んだ土砂流動現象の解析の構築を行い、精度検証を行う。

2. Bingham 流体の概要

Bingham 流体は非 Newton 流体の一つであり、せん断応力が降伏値に達するまでは速度勾配を持たない構造を保持し、固体のようにふるまい、降伏値を超えた後は流動するという性質を持っている。土砂流動の解析に Bingham 流体を用いる根拠には、液状化した砂のせん断応力と速度勾配の関係が示す挙動が Bingham 流体のそれと近似できるからである。

図 1 に液状化した砂のせん断応力と速度勾配の関係を示す。

図 1 を見ると相対密度 Dr によるばらつきは多少あるものの切片のある直線をとっていることがわかり、降伏値 τ_0 と降伏後の粘性係数 η を用いて表現された Bingham 流体の一般式

$$\tau = \tau_0 + \eta \gamma \quad \left(\gamma = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (1)$$

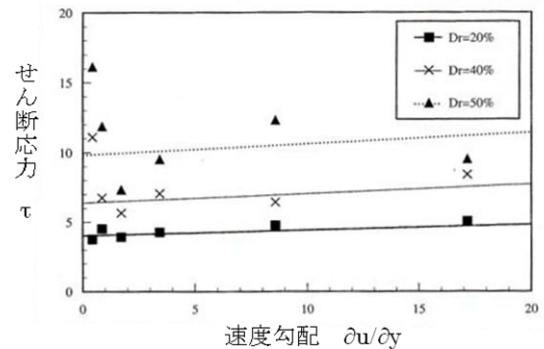


図 1. 液状化した砂の τ と $\partial u / \partial y$ の関係
(「地盤の液状化発生から流動までを予測対象とする解析手法」、渦岡(2000)より抜粋)

と、近似できることが見て取れる。砂の液状化が Bingham 流体で表現できるのならば、同じ砂と水の混在している状態にある土砂流動現象も Bingham 流体で表現することが可能である。

3. 数値解析手法の概要

Bingham 流体は非 Newton 流体である為、本来は、Newton 流体の仮定に基づく Navier-Stokes 式を用いた解析を行うことはできない。しかし、牛島¹⁾は不連続な Bingham 流体の粘性係数に連続性を有する関数を用いて近似することで Bingham 流体の Navier-Stokes 方程式による解析を試みている。そこで本研究では、最終的に堤防の流動性破壊に適用することを念頭におき、自由表面流解析手法である VOF 法の解析 scheme に則った Bingham 流体解析を試みる。なお、本研究では Bingham 流の粘性係数の近似精度を検証することを念頭においた取り組みであることから自由表面を考慮しない管路流の場で検証を行うこととした。

Bingham 流におけるせん断応力は牛島に倣い Papanastasiou が提案した次の式を用いる。

$$\tau = \left[\eta + \frac{\tau_0}{|\gamma|} (1 - e^{-m|\gamma|}) \right] \gamma \quad (2)$$

m は成長応力指数と呼ばれ時間の次元を持ち、大きくすれば図 2 で示すように近似精度が高くなる。この式から見かけの粘度 η' の式を導くこ

とができる。

$$\eta' = \eta + \frac{\tau_0}{|\dot{\gamma}|} (1 - e^{-m|\dot{\gamma}|}) \quad (3)$$

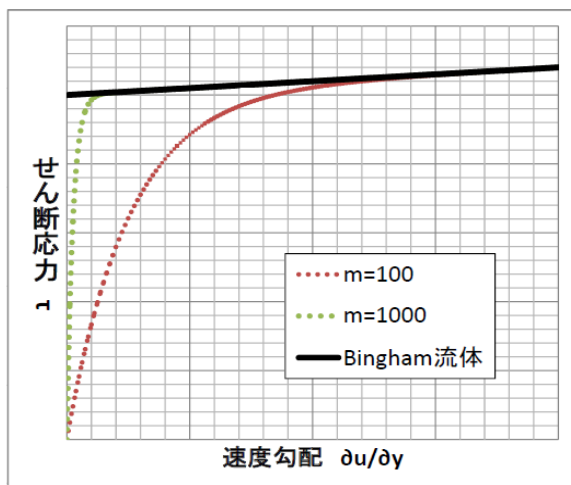


図2. Papanastasiou の Bingham モデル

今回の解析では、この見かけの粘度 η' を数値解析で用いられるセル毎の粘性係数として解析を行う。

4. 解析結果の概要

図3に、通常の Newton 流体の場合の硫酸（動粘性係数 $= 1.3 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$ ）を示す。10cm×10cmにおける平面二次元場において 1mm×1mm のセルが 100×100 個存在している。左から右に流体が流れ、上と下には境界を与えている。左端から 2cm の位置までは上と下には壁面摩擦がなく、2cm から右端までは壁面摩擦が存在している。左端の流入境界から X,Y 軸方向にそれぞれ $U=1.0 \times 10^{-5} (\text{m/s})$, $V=0.0 (\text{m/s})$ の流速を与えている。

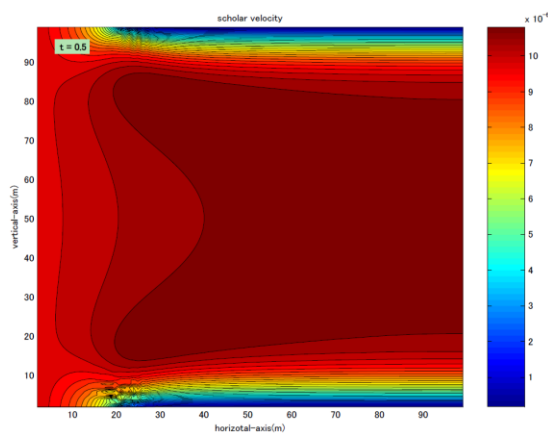


図3. 硫酸の合成流速

図3を見ると、上下の壁面境界摩擦によって境界層が発生している状況が再現できている。境界付近での流速の現象が顕著に出ている。

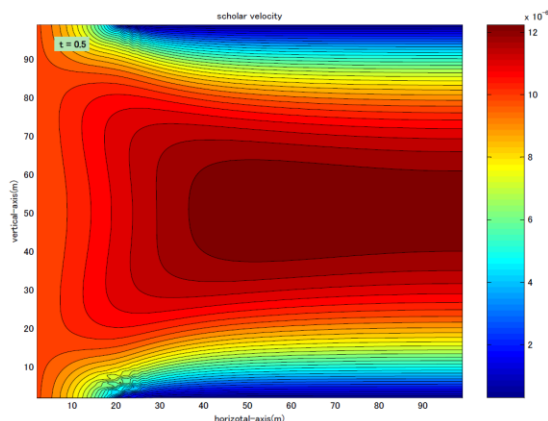


図4. Bingham 流体の合成流速

図4に Bingham 流体の場合を示す。Newton 流体の解析結果と似たような挙動であるが、粘度の影響が大きくあるために上部と下部による速度減少が更に大きく働いている。

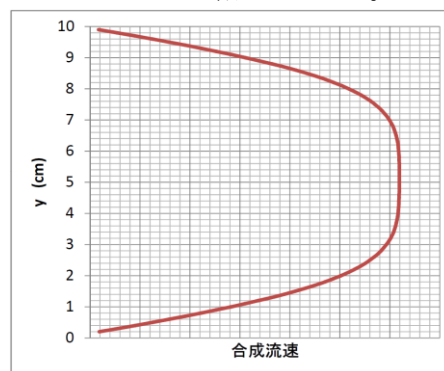


図5. Bingham 流体流化方向の合成速度分布

図5は Bingham 流体の流速の鉛直分布であるが、理論解に良好に一致しており、本解析手法が良好な精度を有していることを確認することができた。

5. 結論

Newton 流体の運動方程式である Navier-Stokes 方程式を VOF scheme を用いて解析する際に、不連続な Bingham 流体の粘性係数に対して関数近似を行うことで、Bingham 流体解析を行う手法を構築することができた。

解析結果は既存の理論値とも整合性が確認でき、一定の精度を有していることが確認できた。

今後の課題は、更に様々な条件下での計算を行って妥当性の検証を行うと共に、自由表面泥流解析への適用を行うことである。

参考文献

- 1)永井克明、牛島省：一般座標系を用いた自由液面を有するビンガム塑性流体の数値解析手法．水工学論文集、第54巻
- 2)渦岡良介：地盤の液状化発生から流動までを予測対象とする解析手法に関する研究、