PDS-FEMの亀裂入りシェル要素の開発

東京大学　学生会員　○藤田航平
東京大学　正会員　堀宗朗
東京大学　正会員　市村強
東京大学　正会員　Lalith Wijerathne

1.　はじめに

本研究では，亀裂の入ったシェル要素を開発する (**図–1** 参照)．このような要素を開発することで亀裂の入ったシェルを少ない計算量で簡便に解析できるようになる．

亀裂入りシェル要素の導出の要点は二つある．本研究では，シェルを特殊な形状を持った三次元弾性体とみなし，三次元弾性体の汎関数からシェル内で定義された関数が満たす汎関数を導出する．要素導出の第二の要点は，亀裂の扱いである．本研究では，粒子離散化法 (PDS: Particle Discretization Scheme)[1),2)]を用いる．PDS とは，特性関数を基底関数に用いた離散化手法である．PDS を有限要素法に適用することで，変位場の不連続面である亀裂を適切に離散化できるようになる．

本研究で開発したシェル要素は，任意深さの亀裂を要素内にモデル化することができる．この要素を用いることで，表面から進行するような疲労亀裂の進展解析を簡便に行うことができる．

2.　亀裂入りシェル要素の導出

曲がった形状を持つシェル要素を厳密に構築するため，本研究では任意形状の弾性体を出発点とする．3 次元弾性体の変位関数の汎関数は，直交座標系 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)$ において次のように表される[2)]．

$$L^B(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\epsilon}, \boldsymbol{\sigma}) = \int_B \frac{1}{2}\epsilon_{ij}\, c_{ijkl}\, \epsilon_{kl} - \sigma_{ij}(u_{i,j} - \epsilon_{ij})\, \mathrm{d}V.$$

B は弾性体の領域，$(.)_{,i}$ は偏微分を表す．$\{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\epsilon}, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{c}\}$ はそれぞれ変位，歪，応力，等方弾性テンソルである．シェルは，中立面 $\boldsymbol{x}^M(\xi^1, \xi^2)$ に沿った曲線座標系 $\boldsymbol{\xi} = (\xi^1, \xi^2, \xi^3)$：

$$\boldsymbol{x}(\xi^1, \xi^2, \xi^3) = \boldsymbol{x}^M(\xi^1, \xi^2) + \{\boldsymbol{x}^M_{,1}(\xi^1, \xi^2) \times \boldsymbol{x}^M_{,2}(\xi^1, \xi^2)\}\xi^3$$

を用いて表示する．座標変換することで，$\boldsymbol{\xi}$ 座標系の汎関数 L'^B を得る．座標変換の際，共変微分を用いて，曲座標系での微分を厳密に評価する．

L'^B の引数である関数 $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\epsilon}, \boldsymbol{\sigma}$ は $\boldsymbol{\xi}$ の関数である．シェルの構造応答特性に着目し，関数を中立面に関して展開する．すなわち，

$$u^i(\xi^1, \xi^2, \xi^3) = U^i(\xi^1, \xi^2) - W_{,i}(\xi^1, \xi^2)\xi^3 \qquad (i = 1, 2), \qquad u^3(\xi^1, \xi^2, \xi^3) = W(\xi^1, \xi^2).$$

ここで U^i と W は中立面の変位成分である．同様に，歪と応力を中立面で展開し，汎関数 $L^{B'}$ に代入することでシェルの汎関数 F_{shell} を導出する．F_{shell} の関数はすべて (ξ^1, ξ^2) の 2 変数関数となる．

PDS[1)]では，関数を $f(x) = \sum_\alpha f^\alpha \phi^\alpha(x)$ と離散化する．f^α は定数，$\phi^\alpha(x)$ は対象としている領域の領域分割 $\{\Phi^\alpha\}$ 上で定義された特性関数である．離散化された関数は $\{\Phi^\alpha\}$ の境界で至るところ不連続となる．一方，$\{\Phi^\alpha\}$ の境界では離散化された関数の微分は発散してしまうため，PDS では $\{\Phi^\alpha\}$ と双対の領域分割 $\{\Psi^\beta\}$ を用いて微分場を $f'(x) = \sum_\beta g^\beta \psi^\beta(x)$ と離散化する．g^β は定数，$\psi^\beta(x)$ は領域分割 $\{\Psi^\beta\}$ の特性関数である．

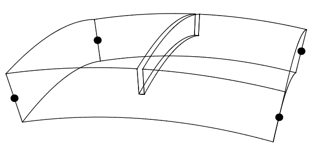
本研究では，シェルの中立面を矩形領域 $\{\Phi^\alpha\}$ と $\{\Psi^\beta\}$ で分割し，変位を $\{\Phi^\alpha\}$，歪・応力を $\{\Psi^\beta\}$ で離散化する[2)]．F_{shell} に PDS を適用し，停留条件を計算することでシェル要素を導出する．亀裂の入ったシェル要素は，弾性体の汎関数 L^B の積分領域 B から，亀裂を含む領域を取り除くことで可能となる[1)]．

3.　数値計算例

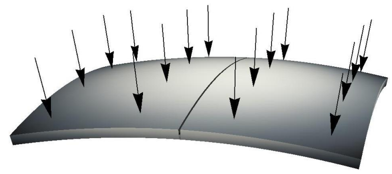
上記の手順で求まったシェル要素を用いて構造解析を行う．厚さ 0.03，大きさ 1.0×1.0 で中立面が

$$x_i^M = \xi^i \quad (i = 1, 2), \qquad x_3^M = -0.2\,\{(\xi^1)^2 + (\xi^2)^2\}$$

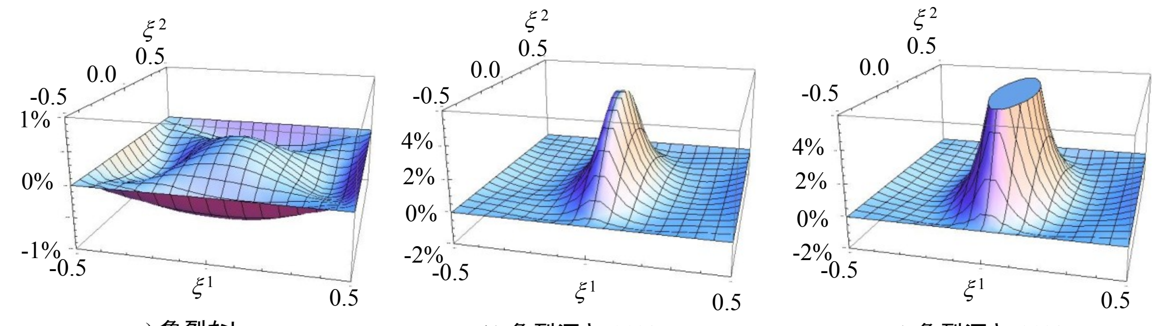
キーワード: シェル，亀裂，粒子離散化
連絡先：　〒 110-0032 東京都文京区弥生 1-1-1 東京大学地震研究所，Email: fujita@eri.u-tokyo.ac.jp



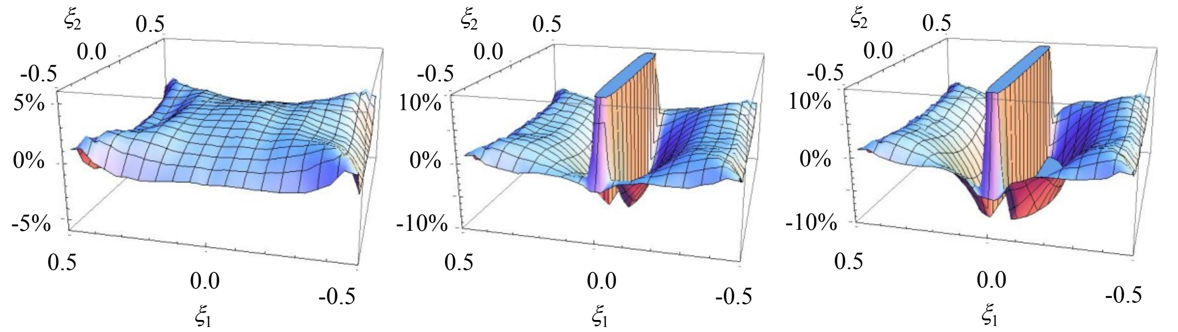
図–1 亀裂入りシェル要素



図–2 数値解析例：亀裂が中央に入ったシェルの 4 辺を固定し，等分布荷重を加える．



図–3 変位の誤差分布．縦軸は変位の相対誤差 (誤差/変位の最大値) を示す．



図–4 断面モーメントの誤差分布．縦軸はモーメントの相対誤差 (誤差/モーメントの最大値) を示す．

の正方形状のシェルの凸面側の中央に**図–2** のように亀裂を入れ，4 辺固定条件のもと等分布荷重を加える．このシェルを 25×25= 625 個のシェル要素でモデル化し，面外方向の変位 u^3 と断面モーメント $M = \int_H \sigma_1^1 \xi^3 \, \mathrm{d}\xi^3$ を計算する．**図–3** は左から，亀裂なし，亀裂が板厚の 20%，30%の場合の u^3 の誤差分布である．亀裂がない場合には，参照解である FEM の四面体二次要素による解析結果と誤差 0.5%以内の精度で一致していることが分かる．亀裂が深くなるにつれ，誤差が亀裂付近で大きくなっているのが分かる．**図–4** より，断面モーメントの計算結果は亀裂がない場合誤差が 2%以内，亀裂の深さが板厚の 20%の場合には誤差が 10%以内であることが分かる．亀裂が深くなるにつれて誤差が大きくなるのは，亀裂付近で変位・歪・応力の関数が中立面での低次の関数展開で精度よく近似できないためであると考えられる．

4. おわりに

本研究では，亀裂の入ったシェル要素を開発した．開発した要素は，亀裂がシェル厚さの 20%より浅いときには，変位を誤差 5%以内，断面モーメントを誤差 10%以内の精度で計算することができた．この要素を用いることで，ソリッド要素よりも少ない計算量で亀裂の入ったシェルを計算することができ，シェル構造物の簡便な亀裂進展解析が可能となる．

参考文献

1) Hori M, Oguni K, Sakaguchi H. Proposal of FEM implemented with particle discretization for analysis of failure phenomena. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 2005; **53**:681-703.
2) 藤田航平，堀宗朗：PDS-FEM の亀裂入り構造要素の導出，応用力学論文集，2010; **13**:57-63.