

斜板の三次元自由振動問題への B-spline Ritz 法の適用性

大分工業高等専門学校	学生会員	○清 成 康 平
大分工業高等専門学校	正 会 員	名 木 野 晴 暢
大同大学	正 会 員	水 澤 富 作

1. まえがき

斜板は、航空機の翼構造、橋梁スラブ構造や建築床構造に代表されるように、種々の工学分野で用いられている基本的な構造要素の一つであり、その自由振動特性を正確に把握することは重要である。

三次元弾性論に基づく斜板の自由振動問題では、その基礎方程式を厳密又は解析的に解くことが困難になるので、解を近似的に評価しなければならない。しかし、斜板は、斜角が大きくなると鈍角点での応力の特異性が顕著になるため、斜角の増大に伴い解析精度が低下し、各種近似解にばらつきが見受けられる。従って、この鈍角点における特異性を表現でき、ベンチマークテストに耐えうる精度の高い近似解(数値解)を求めることができる数値解析法の存在は重要である。

平村¹⁾は、斜板の三次元曲げ問題への B-spline Ritz 法²⁾の適用性について明らかにしている。そこで、本論文では、斜板の三次元自由振動問題への B-spline Ritz 法の適用性を明らかにすることを目的としている。

2. B-spline Ritz 法による斜板の自由振動問題の定式化

図-1 には、斜板と直交座標系が示してある。ここで、三次元弾性論に従う均質な斜板は、微小変形かつ線形弾性であると仮定する。また、 a, b, h, θ は、それぞれ、斜板の長さ、幅、厚さ、斜角であり、時間依存性の x, y, z 方向の変位成分を、それぞれ、 u, v, w と定義する。

斜板の自由振動問題の定式化にあたり、直交座標系 (x, y, z) にある斜板から図-2 に示すような親座標系 (ξ, η, ζ) にある立方体への写像を考える。ここで、直交座標系と親座標系の関係式は、次のとおりである。

$$x = a\xi + b\eta \sin \theta, \quad y = b\eta \cos \theta, \quad z = h\zeta \quad (1)$$

無次元振幅変位 $U = u/a, V = v/a, W = w/a$ は、B-spline 関数の三重積で仮定する^{1), 2)}。

$U_{\max}$ を斜板の最大ひずみエネルギー、 $T_{\max}$ を斜板の最大運動エネルギーとすれば、親座標系における斜板

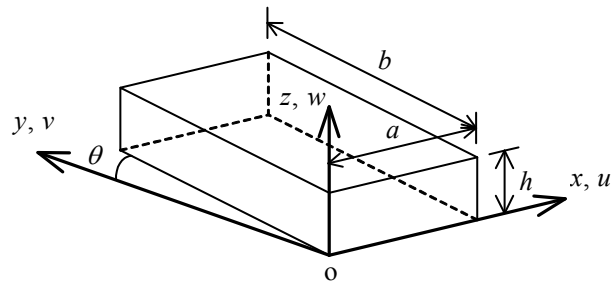


図-1 斜板と直交座標系

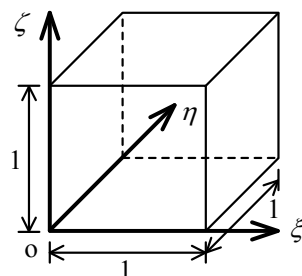
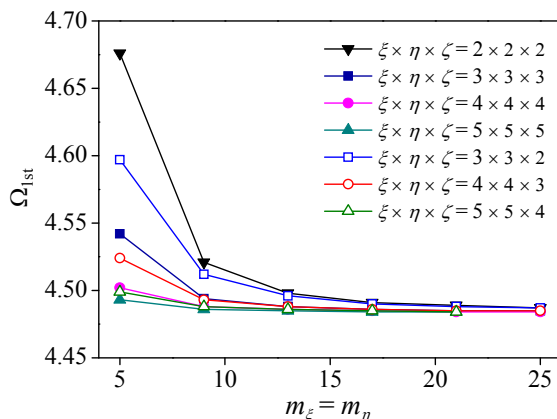


図-2 立方体と親座標系

図-3 周面固定厚肉斜板の基本振動数パラメータ Ω_{1st} の収束性に与える spline 次数 $\xi \times \eta \times \zeta$ の影響

の汎関数 Π は、 $\Pi = U_{\max} - T_{\max}$ で表される。よって、汎関数 Π を極値化すれば、次式の代数方程式を得る。

$$([K] - \Omega^2[M])\{\Delta\} = \{0\} \quad (2)$$

ただし、 $\Omega = \omega a (\rho/E)^{1/2}$ は無次元振動数パラメータであり、 $[K]$ は剛性行列、 $[M]$ は質量行列、 $\{\Delta\}$ は未定係数ベクトルである。よって、次式の振動数方程式を解けば、固有値及び固有ベクトルが求められる。

$$\det([K] - \Omega^2[M]) = 0 \quad (3)$$

キーワード B-spline Ritz 法, 斜板, 三次元自由振動問題, 弾性論, 有限要素法

連絡先 〒870-0152 大分市大字牧 1666 番地 大分工業高等専門学校 TEL: 097-552-7691

表-1 周面固定厚肉斜板の振動数パラメータ Ω の収束性に与える区分点の数 $m_\xi \times m_\eta \times m_\zeta$ の影響

Methods	$m_\xi \times m_\eta \times m_\zeta$	D.O.F.	Modes						
			1st	2nd	3rd	5th	10th	100th	200th
Present	$15 \times 15 \times 15$	16524	4.485	5.549	5.693	6.875	8.011	15.08	18.69
	$17 \times 17 \times 15$	20400	4.485	5.549	5.693	6.875	8.010	15.08	18.62
	$19 \times 19 \times 15$	24684	4.485	5.549	5.693	6.875	8.010	15.08	18.62
FEM (C3D8)	$49 \times 49 \times 25$	180075	4.490	5.548	5.702	6.896	8.049	15.07	18.62
	$57 \times 57 \times 29$	282663	4.488	5.548	5.700	6.891	8.039	15.07	18.60
FEM (C3D20)	$29 \times 29 \times 15$	146247	4.487	5.550	5.695	6.878	8.014	15.09	18.66
	$33 \times 33 \times 17$	215523	4.486	5.549	5.694	6.877	8.013	15.09	18.63

表-2 片持厚肉斜板の振動数パラメータ n^* の精度比較

h/a	Methods	Modes							
		1st	2nd	3rd	4th	5th	6th	7th	8th
0.2	Present	4.188	9.569	10.80	20.94	23.46	23.72	32.25	36.62
	FEM (ABAQUS)	4.196	9.577	10.83	20.97	23.47	23.73	32.29	36.63
	C-Ritz ³⁾	4.192	9.573	10.82	20.95	23.46	23.72	32.27	36.63
	S-Ritz ⁴⁾	4.281	10.42	11.29	23.59	27.48	33.46	43.88	47.27
	FEM (NASTRAN ⁴⁾)	4.268	9.676	11.05	21.16	23.57	23.64	32.63	36.77
0.5	Present	3.421	4.342	6.600	9.389	11.15	12.94	14.46	17.48
	FEM (ABAQUS)	3.426	4.358	6.611	9.396	11.16	12.96	14.47	17.48
	C-Ritz ³⁾	3.425	4.358	6.609	9.395	11.16	12.96	14.46	17.48
	S-Ritz ⁴⁾	3.841	6.556	7.691	13.37	18.70	18.70	18.99	25.39
	FEM (NASTRAN ⁴⁾)	3.455	4.442	6.488	9.430	10.81	13.07	14.04	16.80

3. 数値計算例及び考察

ここでは、固定面と自由面を有する斜板の三次元自由振動解析への B-spline Ritz 法の適用性について検討する。数値計算例では、特に断りがない限り、ポアソン比 $\nu=0.3$ を用い、辺長比 $b/a=1$ とする。

図-3 には、周面固定厚肉斜板 ($h/a=0.5$, $\theta=60$ deg.) の基本振動数パラメータ Ω_{1st} の収束性に与える spline 次数 $\xi \times \eta \times \zeta$ の影響が示してある。ここで、区分点は、点と点の間隔の比が1になるように配置している。これより、 Ω_{1st} は、区分点の数 $m_\xi \times m_\eta \times m_\zeta$ の増大に伴い、一定値へ向かう収束状態を示している。また、 $\xi \times \eta \times \zeta$ を高めることによって、数値解の収束が早くなる。以後の数値計算では、 $\xi \times \eta \times \zeta=4 \times 4 \times 3$ を用いる。

表-1 には、周面固定厚肉斜板 ($h/a=0.5$, $\theta=60$ deg.) の振動数パラメータ Ω の収束性に与える区分点の数 $m_\xi \times m_\eta \times m_\zeta$ の影響が示してある。また、B-spline Ritz 法の良し悪しを判断する目的で、汎用有限要素コード ABAQUS 6.10-2 による有限要素解 (FEM) の収束性も示してある。ただし、C3D8 は一次のソリッド要素、C3D20 は二次のソリッド要素による有限要素解を意味する。これより、有限要素解は、密に要素分割をしても収束値が得られていないのに対して、B-spline Ritz 法による低次から高次までの Ω は、区分点の増大に伴い、一定値へ収束する。また、有限要素法の約 1 / 10

の未知数の数 (D.O.F.) で収束値が得られている。

表-2 には、片持厚肉斜板 ($\theta=45$ deg.) の振動数パラメータ $n^*=\omega b^2(\rho h/D)^{1/2}$ の精度比較が示してある。これより、B-spline Ritz 法による n^* は、Zhou ら³⁾の Chebyshev-Ritz 解 (C-Ritz) や密に要素分割した有限要素解 (ABAQUS) と良く一致しており、また、C-Ritz や ABAQUS よりもやや小さめの値であるので、精度の高い上界の値が得られていると判断できる。

4. まとめ

本論文では、B-spline Ritz 法による斜板の三次元自由振動解析を行い、解の収束性や解析精度について検討を行った。B-spline Ritz 法による数値解は、区分点の増大に伴い、一定値へ向かう安定した収束状態を示している。また、B-spline Ritz 法は、有限要素法よりも少ない未知数で、精度の高い上界の結果が得られる。よって、斜板の三次元自由振動問題への B-spline Ritz 法の適用性は十分にあると判断できる。

参考文献

- 1) 平村ら：土木学会西部支部, I-079, pp.157-158, 2010.
- 2) Nagino et al.: J. Sound Vib., Vol.317, pp.329-353, 2008.
- 3) Zhou et al.: Int. J. Mech. Sci., Vol.48, pp.1481-1493, 2006.
- 4) McGee, Leissa: J. Sound Vib., Vol.144, pp.305-322, 1991.