

平板の曲げ解析における表面せん断応力の影響に関する一考察

足利工業大学 正 会 員 ○ 末 武 義 崇

1. まえがき

Reissner 理論および Mindlin 理論が提案されて以来、横せん断変形の影響を考慮した多くの平板理論が考案されている。特に、理論の高次化を図る研究が多く見られるが、筆者も比較的 low 次の変位場を仮定した、簡明な平板理論の構築^{1), 2)}を試みてきた。一方、従来の平板理論で想定されている荷重は、ほとんどが横荷重のみであり、板上下面における表面せん断応力の影響を考慮した理論や解析例は極めて少ない。これに対し、筆者は、表面せん断応力の影響を評価し得る平板理論の定式化³⁾を試みると共に、横荷重と共に表面せん断応力が作用する平板の三次元弾性解析⁴⁾を実施し、数値的に収束傾向を示す解を求めた。

本研究では、表面せん断応力の影響を考慮した従来の平板理論³⁾に修正を加えると共に、解の三角級数表示の形に工夫を加えた。具体的には、面内回転に関する基礎式を部分的に満足する級数解を仮定し、未定係数の決定を容易にした。構築した平板理論を、横荷重と表面せん断応力の作用を同時に受ける厚板の曲げ解析に適用し、三次元弾性解析結果⁴⁾との比較を通じ、解析理論の妥当性について定量的な検討を行った。

2. 表面せん断応力を考慮した平板理論

本研究では、従来の平板理論³⁾と同様に、面内変位 U および V に関して次の 3 次式を仮定した。

$$\left. \begin{aligned} U &= u - \psi_x z - \frac{4}{3t^2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \psi_x \right) z^3 + \frac{1}{2G} \left\{ \bar{q}_2 \left(z + \frac{z^2}{t} \right) - \bar{q}_1 \left(z - \frac{z^2}{t} \right) \right\} \\ V &= v - \psi_y z - \frac{4}{3t^2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \psi_y \right) z^3 + \frac{1}{2G} \left\{ \bar{r}_2 \left(z + \frac{z^2}{t} \right) - \bar{r}_1 \left(z - \frac{z^2}{t} \right) \right\} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

式(1)は、板上下面におけるせん断応力の境界条件をあらかじめ満足する。たわみ W に関しても、文献 3)と同様に板厚方向に一定 ($W = w$) とした。座標系は、板中央面に $x-y$ 平面を設定し、その法線方向を z 軸とした。式(1)において、 (u, v, w) は板中央面における (x, y, z) 3 方向の変位、 ψ_x および ψ_y は x および y 方向の回転角、 G はせん断弾性係数、 t は板厚を表している。また、図 1 に示したように、 $\bar{q}_1$ および $\bar{q}_2$ は上面 ($z = -t/2$) および下面 ($z = t/2$) に作用する x 方向の表面せん断応力、 $\bar{r}_1$ および $\bar{r}_2$ は上下面 ($z = \mp t/2$) に作用する y 方向の表面せん断応力である。

従来の平板理論³⁾では釣り合い式に誤解があり、この点を修正して基礎式を誘導すると、例えば中央面の面内回転に関して次式が得られる。

$$\nabla^2 \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \frac{t}{24G} \left(\nabla^2 + \frac{24}{t^2} \right) \left\{ \frac{\partial}{\partial x} (\bar{r}_1 + \bar{r}_2) - \frac{\partial}{\partial y} (\bar{q}_1 + \bar{q}_2) \right\} \quad (2)$$

ここで、中央面の面内変位 u および v を表す三角級数として、周辺単純支持の境界条件を満足するように、次式を導入する。

$$\left\{ \begin{aligned} u &= \sum_k \sum_j \left\{ u_{jk} \cos \lambda_j x \sin \mu_k y - \frac{t}{24G} \left(1 - \frac{24}{\kappa_{jk}^2 t^2} \right) (\bar{Q}_{jk}^{(1)} + \bar{Q}_{jk}^{(2)}) \sin \lambda_j x \sin \mu_k y \right\} \\ v &= \sum_k \sum_j \left\{ v_{jk} \sin \lambda_j x \cos \mu_k y - \frac{t}{24G} \left(1 - \frac{24}{\kappa_{jk}^2 t^2} \right) (\bar{R}_{jk}^{(1)} + \bar{R}_{jk}^{(2)}) \sin \lambda_j x \sin \mu_k y \right\} \end{aligned} \right. ; \lambda_j \equiv \frac{j\pi}{a}, \mu_k \equiv \frac{k\pi}{b}, \kappa_{jk}^2 \equiv \lambda_j^2 + \mu_k^2 \quad (3)$$

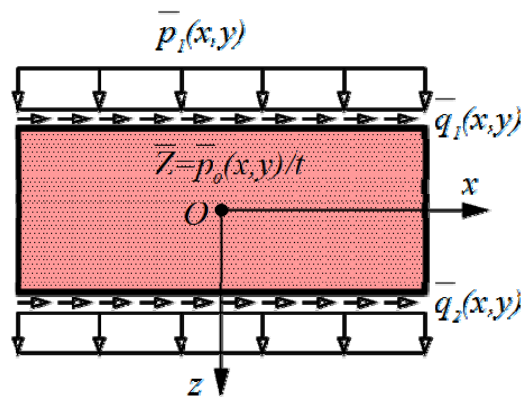


図 1. 平板の荷重構成

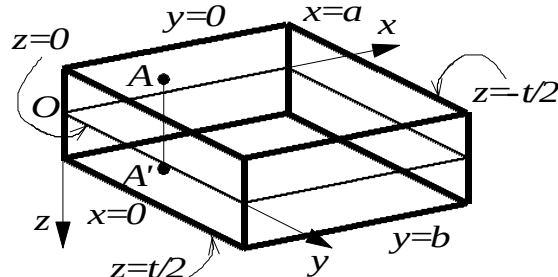


図 2. 解析モデルおよび座標系

キーワード: 厚板, 横せん断変形, 表面せん断応力, 面内変位分布, 垂直応力分布

〒326-8558 足利市大前町 268-1 足利工業大学 都市環境工学科 TEL: 0284-62-0605 FAX: 0284-64-1061

ここに、 $\bar{Q}_{jk}^{(\alpha)}$ および $\bar{R}_{jk}^{(\alpha)}$ ($\alpha = 1, 2$) は、表面せん断応力 $\bar{q}_\alpha$ および $\bar{r}_\alpha$ の Fourier 係数である。両者を含む項が式(2)の右辺に対応している。従って、式(3)を式(2)に代入すれば、簡単な関係式 $\mu_k u_{jk} = \lambda_j v_{jk}$ を導くことができ、未定係数の決定を容易にすることができる。

3. 解析モデル

本研究では、図2に示した矩形平板を解析対象とする。境界条件としては、周辺単純支持された平板に対応するように、面 $x=0, a$ において $V=0$ 、面 $y=0, b$ において $U=0$ 、4つの面全てにおいて $W=0$ とした。解析モデルの形状は正方形とし、幅厚比を $\theta = t/a = 0.5$ として解析を行った。材料定数については、Poisson 比を $\nu = 0.3$ とした。荷重については、板上面 ($z = -t/2$) に全面等分布する、横荷重およびせん断応力が作用するものとした。荷重の大きさについては、無次元化荷重 $\bar{p}_1^* \equiv \{(1-2\nu)/2G\} \bar{p}_1$ の値で $\bar{p}_1^* = 1.0$ とし、表面せん断応力については横荷重との比を $\bar{q}_1/\bar{p}_1 = \pm 0.5$ とした。数値計算に当たっては Fourier 解析を実施し、図2に示した板厚方向の線分 AA' ($x = a/4, y = b/4$) に沿った面内変位および横せん断応力の分布を求めた。

表面せん断力を考慮した場合、式(3)からも明らかなように、面内変位の三角級数展開と表面せん断力の Fourier 級数展開は、異なった形の級数で展開される。このため、単純な係数比較によって未定係数を決定することはできない。詳細は省略するが、本研究では Galerkin 法を用いて未定係数を決定した。

4. 数値計算結果

図3および図4に解析結果の一部を示す。いずれも、Fourier 二重級数の項数を $15^2 = 225$ とした場合の結果である。図3は、図2の線分 AA' に沿った面内変位 U の分布、図4は横せん断応力の分布である。両図とも、縦軸に座標 $\zeta = z/t$ をとり、図の上下が板の上下面に一致するように示した。横軸については、図3では変位 $\alpha = U/a$ 、図4ではせん断応力 $\tau^* \equiv \{(1-2\nu)/2G\} \tau_{xz}$ をとった。縦横の軸は、いずれも無次元化して表示している。両図とも、荷重比 $\bar{q}_1/\bar{p}_1 = 0$ の結果を青丸、 $\bar{q}_1/\bar{p}_1 = 0.5$ の結果を紫の三角、 $\bar{q}_1/\bar{p}_1 = -0.5$ の結果を赤の四角で示した。また、比較のために三次元解析結果⁴⁾をグレーと薄水色のプロットで示した。

2つの図から明らかなように、面内変位分布、横せん断応力分布共に、表面せん断応力の存在によって分布にズレが生じており、定性的に妥当な解析結果が得られている。さらに、三次元解析結果⁴⁾と比較すると、変位・応力共に、定量的にも良好な近似解を与えている様子が認められる。

5. まとめ

表面せん断応力の影響を考慮した平板理論を構築し、面内変位および横せん断応力の板厚方向分布に関する解析を実施した。三次元解析結果との比較を通じ、定量的に妥当な解が得られることを確認した。今後は、文献4)の三次元解析の場合と同様に、解の数値的な収束性について検討する予定である。

参考文献：1) 末武：厚板の曲げ解析における横荷重評価の影響，応用力学論文集，Vol.8, pp.25-32, 2005。

2) 末武：横荷重の影響を考慮した厚板の変形および応力分布解析，応用力学論文集，Vol.10, pp.47-57, 2007。

3) 末武：表面せん断応力の影響を考慮した厚板の曲げ解析，第64回土木学会年次学術講演会，2009。

4) 末武：表面せん断応力の影響を考慮した厚肉矩形平板の三次元弾性解析，応用力学論文集，Vol.13, pp.29-38, 2010。

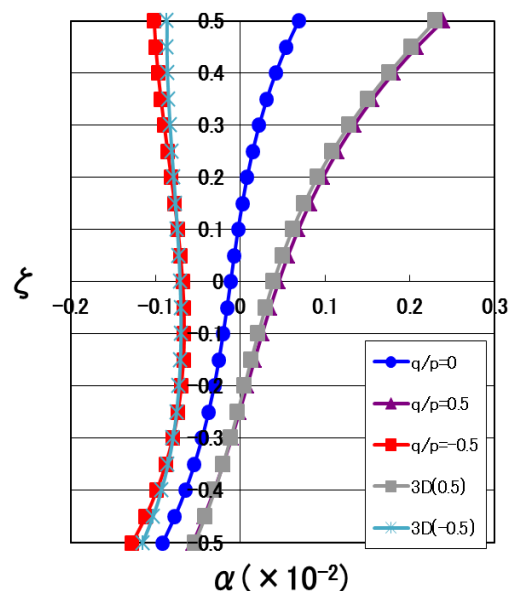


図3. 面内変位分布

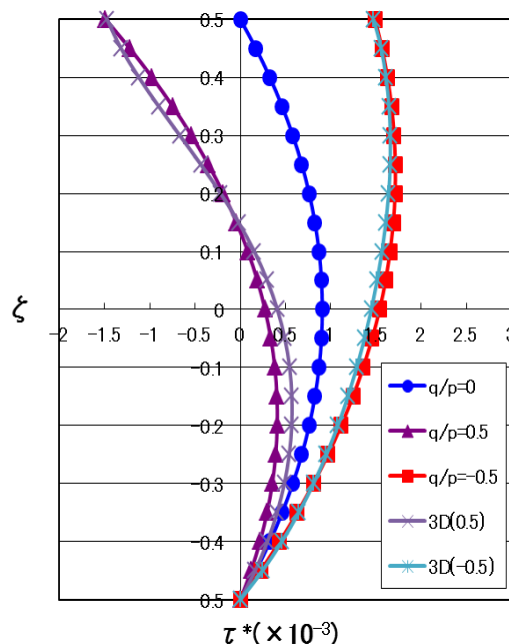


図4. 横せん断応力分布