二次元 Laplace 方程式における混合ハイブリッド有限要素法の基礎的特性

Fundamental Study on Mixed Hybrid FEM in 2-Dimensional Laplace equation

北海道大学大学院工学院 ○学生員 横井崇志 (Takashi Yokoi)
北海道大学大学院工学研究科 学生員 土屋健司 (Takeshi Tsuchiya)
北海道大学大学院工学研究院 フェロー 蟹江俊仁 (Shunji Kanie)
大成建設株式会社 正員 鈴木俊一 (Shunichi Suzuki)

1 研究背景と研究目的

二次元平面場における透水問題を，速度ポテンシャルを用いた二次元 Laplace 方程式で解く場合を考える．一般的な非退化形式で与えられた有限要素法（以下，FEM と称す）の場合，各節点に与えられるのはスカラー値である速度ポテンシャルであり，流速はその一階微分として各節点で計算されることになる．この時，各要素の境界を通じて流入・流出する流量は，境界面に沿って速度ポテンシャルから補間された流速に基づいて求められるが，境界面での流入・流出量の連続性については保証されないという欠点がある．これに対し，混合ハイブリッド有限要素法(以下，MHF と称す)は，非退化形式に代わって混合形式を採用することで，流速あるいは流量自体を目的変数の一つとして与えた上で，要素境界での流量を直接未知数として解くところに特徴がある．こうした特性から，著しく透水係数が異なるような地盤中における地下水流動問題においても，精度の高い流量計算がなされることが鈴木[1)]らによって報告されている．本研究では，MHF の概念を整理するとともに，基礎的な二次元 Laplace 方程式を用いて FEM との相違点を確認することを目的とする．

2 混合ハイブリッド有限要素法の基礎概念

非退化形式で表された二次元 Laplace 方程式は，速度ポテンシャルをϕ，透水係数をkとした時，次式で表される．

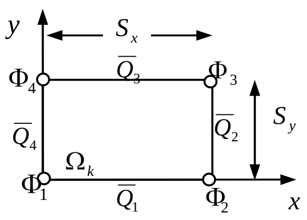
$$k\nabla^2\Phi = 0 \qquad \text{式(2-1)}$$

弱形式展開した一般的な FEM の場合，目的変数は速度ポテンシャルϕ一つとなり，補間関数は一階の微分可能性を満たせば良いことになる．これに対し混合形式を適用した場合は，次のような二つの式で表現されることになる．

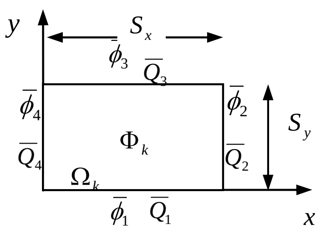
$$k\nabla\Phi = -\vec{q} \qquad \text{（ダルシー則）} \qquad \text{式(2-2)}$$

$$\nabla\vec{q} = 0 \qquad \text{（質量保存則）} \qquad \text{式(2-3)}$$

すなわち，混合形式を採用することにより，速度ポテンシャルϕに加えて，流量qもその目的変数として扱われることになる．これらを離散化して解く場合，完全な（Complete）補間関数を適用するとすれば，速度ポテンシャルϕについては流量qよりも１オーダー上の補間関数を適用しなければならないことになる．しかし MHF では，速度ポテンシャルϕと流量qの補間関数に関する次数の制約条件を緩和しており，それが不完全（Incomplete）法と呼ばれたり，Hybrid 法と呼ばれる所以になっている[2)]．さらに，透水問題で直接的に求めたい境界面上での流量自体を目的変数としており，節点での流量を求めないことも大きな特徴と言える．図１は，一般的な FEM とここで扱う MHF との違いを説明するもので，前者は節点に目的変数である速度ポテンシャルϕを規定しているのに対し，MHF では境界上での速度ポテンシャルと流量を直接未知数としているところに大きな違いがある．このため，境界上での流量から，内部の流速を補間するための関数として，式(2-4)で示される Raviart-Thomas 型の形状関数の導入[3)]が必要となる．この形状関数の最大の特徴は，境界上での流量から要素内部の流速を補間するために，形状関数が次元を持っているという点である．



(a) 一般的な FEM



(b) MHF

図 1 FEM と MHF の前提条件

Keyword MHF 混合ハイブリッド有限要素法 地下水流動問題 二次元 Laplace 方程式
連絡先 〒060- 8628 札幌市北区北１３条西８丁目大学院工学院/ TEL 011-706-6176

$$[w]=\begin{bmatrix} w_{1,x} & w_{2,x} & w_{3,x} & w_{4,x} \\ w_{1,y} & w_{2,y} & w_{3,y} & w_{4,y} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 0 & \dfrac{x}{S_xS_y} & 0 & \dfrac{(x-S_x)}{S_xS_y} \\ \dfrac{(y-S_y)}{S_xS_y} & 0 & \dfrac{y}{S_xS_y} & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{式(2-4)}$$

$$\bar{q}(x,y)=[\overline{Q}][w]^T \qquad \text{式(2-5)}$$

その結果，混合形式でありながら，最終的には境界上での速度ポテンシャルと，境界上での流量の関係を示す，次式を解くことになる．

$$[K]\{\bar{\phi}\}=\{\overline{Q}\} \qquad \text{式(2-6)}$$

3　MHF と FEM との比較解析

MHF と FEM との特徴を比較するために，図 2 に示すような地下水流動モデル(分割数 20×20)を考えた．斜線部で示す要素は透水係数が極めて低い（0.01 倍）地盤であり，左下から右上へと不透水部分を避けるように流れが発生する問題である．ここでは，不透水境界付近での流量に注目するため，モデル内に設定した 3 つの Line に沿って，その流量比較を示した．これを，図 3，図 4，図 5 ,に示す．図 3，図 5,より不透水領域に向かう流量は FEM で大きめに評価されていることがわかる．一方，不透水層との境界が存在しない Line では，図 4 の通り MHF と FEM の流量は概ね一致しており，不透水境界付近で大きな差が発生することがわかる．

4　考察

本論文では，紙面の都合上示すことができなかったものの，FEM における離散化数を大きくしていくことによって，次第に MHF の結果に近づいていくことが確認されており，不透水境界を有するような問題では，計算効率ならびに計算精度の面において MHF の優位性が確認できたものと考える．

今後は力学問題への応用など，幅広い分野での優位性を確認するためにも，どのような条件で MHF と FEM の差異が顕著になるか，様々なモデルを用いて比較検証していく必要があろう．また，三次元問題へ拡張したときの計算負荷と効率等についても検討していく予定である．

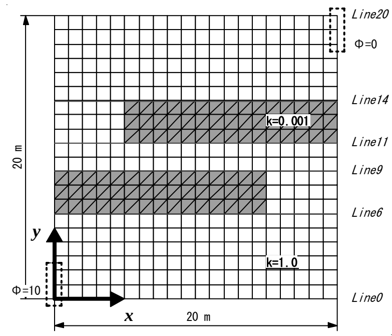


図 2　解析モデル平面図

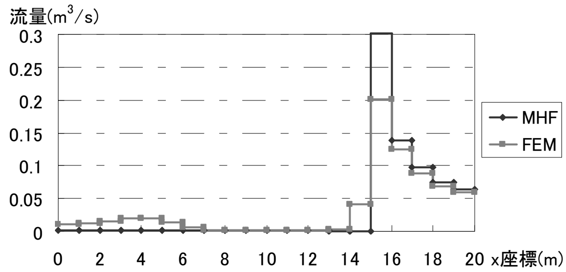


図 3　Line9 の流量比較

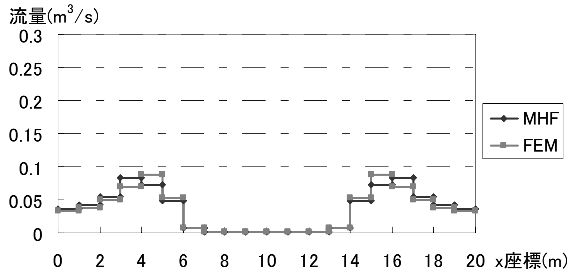


図 4　Line10 の流量比較

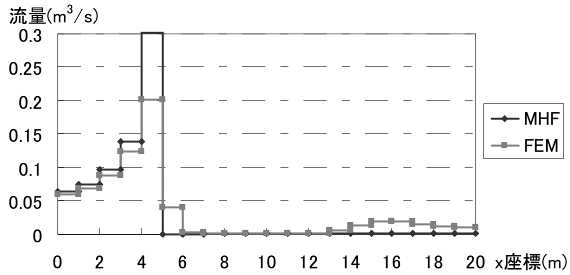


図 5　Line11 の流量比較

参考文献

1）鈴木俊一，青木広臣，川上博人：定常地下水流動問題に対する混合ハイブリッド有限要素法の適用例，土木学会第 65 回年次学術講演会，CS7-062，2010

2) O.C Zienkiewicz, R.L.Taylor. The Finite Element Method: Its Basis and Fundamentals Sixth, Elsevier, 2005

3）Raviart, P.-A.:Thomas, J-M:A mixed finite element method for second order elliptic problems, in “Mathematical Aspects of Finite Element Methods” PP.2922-315,Lecture Notes in Mathematics 606, Springer-Verlag, Berlin, 1977