

衝撃荷重を受ける軸対称弾性円盤の主応力分布

○明石工業高等専門学校 正会員 石丸和宏

1. はじめに

有限弾性体の応力波伝播問題は、構造物の動的、衝撃破壊問題、非破壊検査問題などに深く関係しており、工学的に重要である。衝撃破壊問題においては、ハードな衝撃¹⁾の破壊形式は表面破壊、貫入、裏面剥離、貫通などがあり、これは有限物体内の応力波伝播を詳細に調べることが必要である。特に裏面剥離問題などでは、圧縮、引っ張り応力だけでなく、主応力を求めることが非常に重要であると考えられる。

本研究では、軸対称円盤を取り扱い、動弾性論に基づく固有関数展開法により、衝撃荷重を受ける際の円盤内の様々な点の応力を時間ごとに計算し、応力の大きさを色の濃淡で表すコンター図に示すことにより円盤内の応力波および主応力の可視化を行う。

2. 応力波伝播解析

等方性材料からなる軸対称円盤の座標を図1に示す。取り扱う円盤の厚さは h 、半径は b とする。荷重 $q(r,t)$

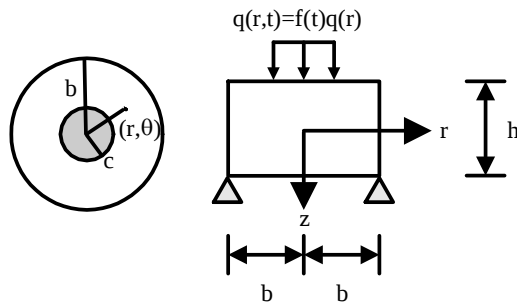


図1 軸対称円盤の座標系

は円盤上面に半径 c の円内に作用し、 $q(r,t) = f(t)q(r)$ のように時間関数 $f(t)$ と空間関数 $q(r)$ の積として表されるものとする。図において、座標 r, z 方向の変位 u, w で表した運動方程式は物体力が存在しない場合、次式で与えられる。

$$\begin{aligned} G \left(\nabla^2 u + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial e}{\partial r} - \frac{u}{r^2} \right) &= \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \\ G \left(\nabla^2 w + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial e}{\partial z} \right) &= \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (1)$$

ここに、 G, ν, ρ, t はそれぞれせん断弾性係数、ポアソン比、密度、時間を表し、ラプラシアン ∇^2 、体積ひずみ e はそれぞれ、

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad e = \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{\partial w}{\partial z} \quad (2)$$

である。また応力-変位関係は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \sigma_r &= 2G \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\nu}{1-\nu} e \right), & \sigma_\theta &= 2G \left(\frac{u}{r} + \frac{\nu}{1-\nu} e \right), \\ \sigma_z &= 2G \left(\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\nu}{1-\nu} e \right), & \tau_{rz} &= G \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \right) \end{aligned} \quad (3)$$

その他の応力成分は軸対称問題のため零となる。

次に、支持条件は解析の便を考慮して、

$$w = \sigma_z = 0 \quad (4)$$

とする。円盤上下面の境界条件は次式とする。

$$\sigma_z = -f(t)q(r), \quad \tau_{rz} = 0 \quad \left(z = -\frac{h}{2} \right) \quad (5)$$

$$\sigma_z = \tau_{rz} = 0 \quad \left(z = \frac{h}{2} \right) \quad (6)$$

また、載荷される前の円盤は静止しているものとする。

今、式(1)の解を求めるために、慣性力の影響を考慮した擾乱解 $u^D(t), w^D(t)$ と無視した準静的解 u^S, w^S の和で与えられるものとする。

$$u(t) = u^D(t) + f(t)u^S, \quad w(t) = w^D(t) + f(t)w^S \quad (7)$$

擾乱解 $u^D(t), w^D(t)$ は未定の時間関数 $Q_{mn}(t)$ と固有関数 U_{mn}, W_{mn} で次のように表す。

$$\begin{aligned} u^D(t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} Q_{mn}(t) U_{mn}, \\ w^D(t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} Q_{mn}(t) W_{mn} \end{aligned} \quad (8)$$

自由振動問題の支配式、固有関数の直交性および準静的問題のつり合い式などを利用すると、未定の時間関数 $Q_{mn}(t)$ に関する次の微分方程式を得る。

$$\ddot{Q}_{mn}(t) + \omega_{mn}^2 Q_{mn}(t) = -\frac{I_{mn}}{N_{mn}^2} \ddot{f}(t) \quad (9)$$

微分方程式(9)は初期条件を考慮すると、本問題の解式が得られる。

3. 3次元主応力の決定

軸対称円盤の応力は、半径方向 σ_r 、円周方向 σ_θ 、厚さ方向 σ_z とせん断力 τ_{rz} が存在するが、その他は0となる。したがって、主応力 σ を求めるための方程式は

$$\begin{aligned} \sigma^3 - (\sigma_r + \sigma_\theta + \sigma_z)\sigma^2 + (\sigma_r\sigma_\theta + \sigma_r\sigma_z + \sigma_\theta\sigma_z - \tau_{rz}^2)\sigma \\ - \sigma_r\sigma_\theta\sigma_z + \sigma_\theta\tau_{rz}^2 = 0 \end{aligned} \quad (10)$$

キーワード：動弾性論、円盤、固有関数、衝撃、主応力

連絡先：〒674-8501 兵庫県明石市魚住町西岡 679-3, TEL 078-946-6141, FAX 078-946-6184

を満たす 3 根 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ が主応力となる．この式は 3 次式であるため Regula-Falsi 法により数値的に求める．

4. 数値計算例

数値計算において，円盤の材料はコンクリートを想定し，円盤厚/半径比 = 0.4，ポアソン比 0.167 として計算を行った．載荷荷重の時間関数 $f(t)$ はヘビサイドのステップ関数とし，空間に関しては荷重強度 q の等分布荷重，また荷重の分布半径/円盤半径比は 0.2 とした．

次に，本研究で求める応力，変位式は級数で表されるため，収束性を考慮し， $m=200, n=1000$ として計算を行った．なお，時間は無次元時間 $\tau (= ct/h)$ で取り扱う．すなわち， $\tau = 1$ は縦波が上面から下面に到達する時間を意味する．また，コンター図の色を示す数値は応力値を荷重強度 q で割った値である．

時間ごとに厚さ z 方向に 51 点，半径 r 方向 51 点の計 2601 点における応力 $\sigma_z, \sigma_r, \sigma_\theta, \tau_{rz}$ の値を求め，それらから，3 次式の解である 3 つの主応力 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ を求めた．図 2 は各時間における主応力 σ_1 の分布である． $\tau = 0$ は荷重が載荷された瞬間であるからどの地点においても応力は発生していない． $\tau = 0.3 \sim 0.9$ では載荷端での引張応力発生のため，若干，主応力 σ_1 においても引張応力が発生し，その点を中心に円状に広がっていく様子がわかる．しかしながら，荷重直下では厚さ方向応力 σ_z が圧縮を受けているため，引っ張り応力が発生していない．応力波の P 波の圧縮波は $\tau = 1$ で下面に到達し，自由面で反射することにより位相が変わり引張波になるため，下面近傍において圧縮荷重が作用しても引張応力が発生していることがわかる．また，反射後の引張りの範囲は裏面剥離の面を表していると思われる．

5. まとめ

本研究では 3 次元動弾性論に基づく固有関数展開法により軸対称円盤の初期応力応答を求めた．また，円盤内部点における応力から主応力を求め，コンター図で視覚的に表現することができた．このことから，数値を示すことにより，過渡状態の主応力の分布状況を視覚的に表現することができた．このデータは数値解析法等に対し基礎データを与えるものと思われる．本研究ではコンクリートからなる単層円盤を取り扱ったが，今後は近年よく用いられる複合材料からなる積層板の主応力の伝播問題を調べる予定である．

参考文献

- 1) 土木学会構造工学委員会：構造物の衝撃挙動と設計法，土木学会，1993.
- 2) 石丸和宏：動弾性論による軸対称円盤内の応力波の可視化，計算工学講演会論文集，計算工学会，Vol. 14, pp.325-328, 2009.

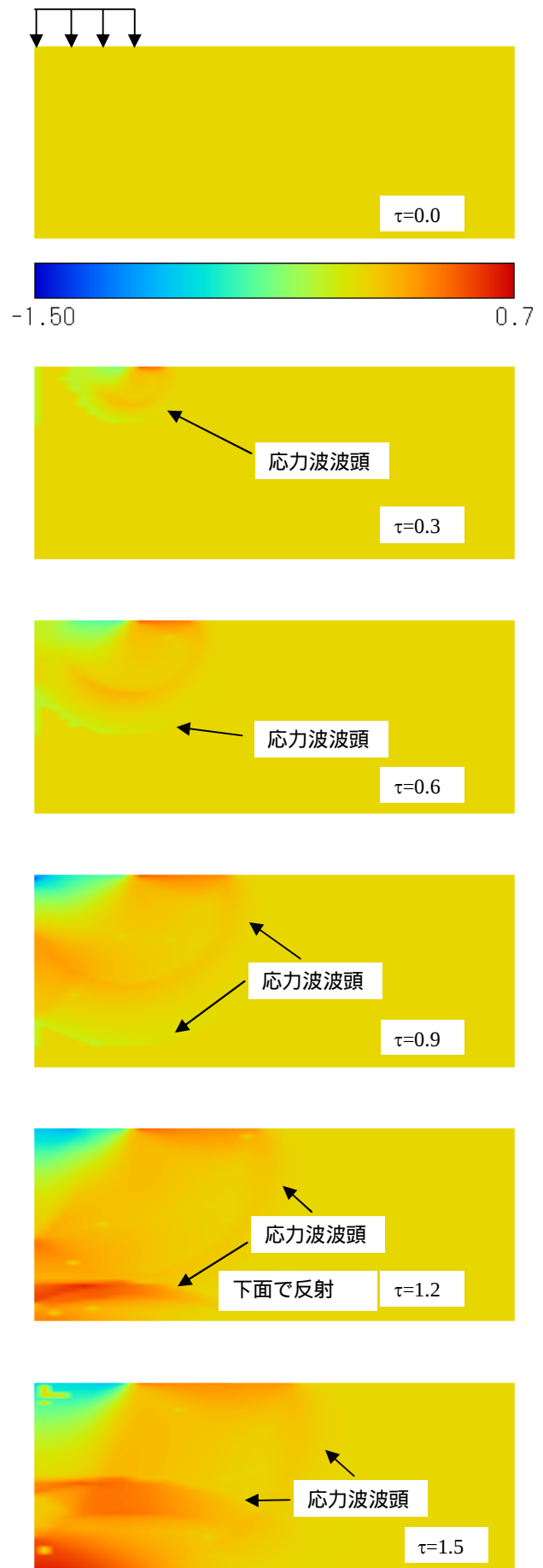


図 2 各時間の主応力 σ_1 の応力分布