

弾性波動解析のための境界積分方程式と領域積分方程式の統合化にむけた検討

東京理科大学 学生会員 ○倉浪 晃一
東京理科大学 正会員 東平 光生

1 序論

近年著者らの研究グループでは、高速領域積分方程式法を用いた弾性波動場の散乱解析手法の開発・検討を行ってきた。この解析手法は、Fourier 変換と Krylov 部分空間法を領域積分方程式に適応させることで、従来必要であった大規模な係数行列を導出せずに方程式の解を得ることを可能にしている。しかし、波動場内に空洞やひび割れ等が存在している際には、境界積分方程式を用いた解析手法も強力な手段となる。今回、境界積分方程式の積分範囲を拡張し、領域積分方程式として扱う手法について検討する。これによって、弾性波動解析のための積分方程式論の新たな手法を確立させることを目的とする。

2 解析理論

弾性波動場における Green 関数 $G_{ij}(x, y)$ は以下で定義される。

$$\begin{aligned} L_{ij}G_{jk}(x, y) &= -\delta_{ik}(x - y) \\ L_{ij} &= (\lambda + \mu)\partial_i\partial_j + \delta_{ij}\mu\partial_k^2 + \delta_{ij}\rho\omega^2 \end{aligned} \quad (1)$$

ここで、 λ, μ は Lamé 定数、 ρ は質量密度である。この Green 関数を用いて、波動場内に空洞が存在している場合の境界積分方程式は以下のように表現される。

$$\begin{aligned} v_i(x) &= \int_{\Gamma} G_{ij}(y, x)T_{jk}v_k(y) - v_k(y)T_{kj}G_{ji}(y, x)d\Gamma_y \quad (2) \\ &\quad - \int_{\Gamma} G_{ij}(y, x)T_{jk}u_k^{(I)}(y) - u_k^{(I)}(y)T_{kj}G_{ji}(y, x)d\Gamma_y \end{aligned}$$

ここで、 $v_i(x)$ は散乱波、 $u_i^{(I)}(x)$ は入射波、 T_{ij} は境界上の散乱効果を表す演算子である。ここで境界上でのみ値を持つデルタ関数 $\delta_{\Gamma}(x)$ を次で定義する。

$$\delta_{\Gamma}(x) = \begin{cases} \infty & (x \in \Gamma) \\ 0 & (x \notin \Gamma) \end{cases} \quad (3)$$

ただし、 $\delta_{\Gamma}(x)$ は次式を満たす。

$$\int_{\Gamma} f(x)d\Gamma = \int_{\mathbb{R}^3} \delta_{\Gamma}(x - y)f(y)dy \quad (4)$$

ここで、 $f(x)$ は $\mathbb{R}^3$ 上で定義されている任意の関数である。式 (4) を用いることによって、 Γ 上での積分を $\mathbb{R}^3$ 上での

積分に置き換えることができる。式 (4) によって、式 (2) の境界積分方程式を領域積分方程式に拡張すると、次のようになる。

$$\begin{aligned} v_i(x) &= \int_{\mathbb{R}^3} \delta_{\Gamma}(G_{ij}(y, x)T_{jk}v_k(y) - v_k(y)T_{kj}G_{ji}(y, x))dy \quad (5) \\ &\quad - \int_{\mathbb{R}^3} \delta_{\Gamma}(G_{ij}(y, x)T_{jk}u_k^{(I)}(y) - u_k^{(I)}(y)T_{kj}G_{ji}(y, x))dy \end{aligned}$$

式 (5) の両辺を Fourier 変換することで、次式を得る。

$$(\delta_{ik} - \hat{h}_{ij}\mathcal{F}\delta_{\Gamma}M_{jk}\mathcal{F}^{-1})\hat{v}_k(\xi) = \hat{h}_{ij}\mathcal{F}\delta_{\Gamma}M_{jk}\mathcal{F}^{-1}\hat{u}_k^{(I)} \quad (6)$$

ここで、 M_{ij} は波数領域における散乱効果を表す演算子をまとめたもの、 δ_{ij} は Kronecker のデルタを表す。式 (5) に含まれている積分演算は式 (6) で消え、その代わりとして波数領域の Green 関数 $\hat{h}_{ij}(\xi)$ 、Fourier 変換・逆変換の演算子 $\mathcal{F}, \mathcal{F}^{-1}$ が現れている。式 (6) に含まれる Fourier 変換・逆変換を離散化し、 $\hat{v}_i$ にかけている演算子に Krylov 部分空間反復解法³⁾を適用することにより、散乱波を求めることが可能となる。

3 解析結果

図-1 で表される三次元の座標系を考える。波動場のパラメータについて、Lamé 定数を $\lambda = 4.0$ GPa, $\mu = 2.0$ GPa, 質量密度を $\rho = 2.0$ g/cm³ とする。

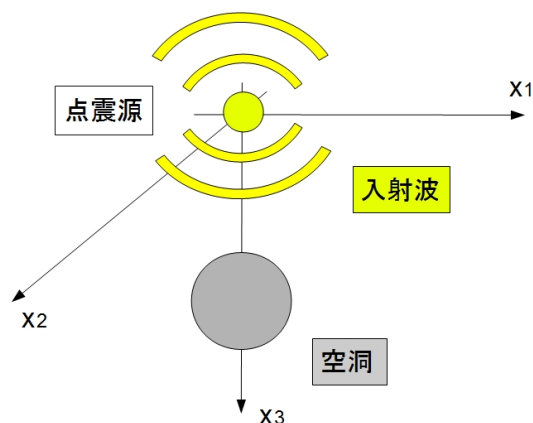


図 1: 座標系

キーワード：弾性波解析, 領域積分方程式, 境界積分方程式, Fourier 変換, Krylov 部分空間法

〒 278-8510 千葉県野田市山崎 2641 東京理科大学理工学部土木工学科 応用力学研究室 TEL:0471-24-1501(ex 4063)

点震源の加振力を 1.0×10^{10} N, 加振振動数を 1.0Hz とする. 原点を x_3 方向に加振することによって生じる入射波の数値解析結果が図-2である. このとき入射波は加振方向に広がるのではなく, 加振方向と直交する方向に高い変位振幅が生じている⁴⁾.

また, 波動場内の空洞によって生じる散乱波の数値計算結果を図-3,4に示す. 図-3は, 図-2で示される入射波が, 空洞の中心座標 (0, 0, 5), 半径 3km の球型の空洞に当たったときに生じる散乱波の解析結果である. また図-4は, 入射波が空洞の中心座標 (5, 0, 5), 半径 3km の球型の空洞に当たったときに生じる散乱波の解析結果である.

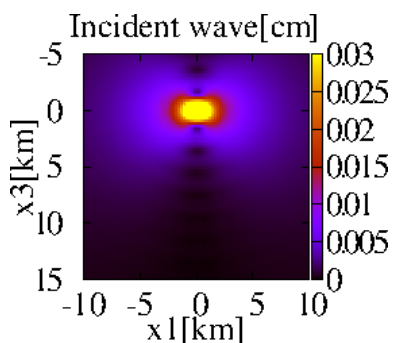


図 2: 入射波 ($x_2 = 0$ 断面)

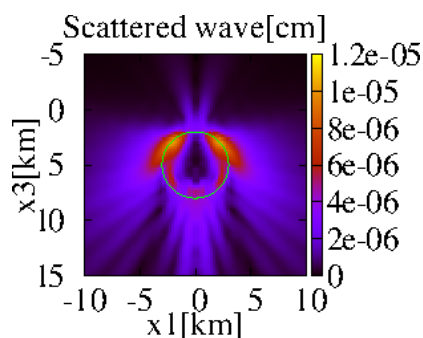


図 3: 散乱波 ($x_2 = 0$ 断面)

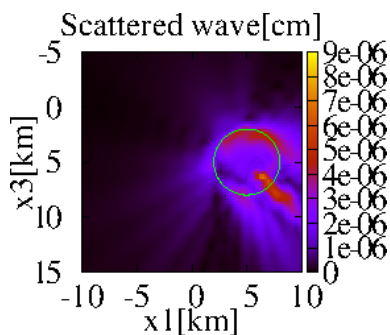


図 4: 散乱波 ($x_2 = 0$ 断面)

図-3によると, 波動変位は空洞に当たり, 媒質と空洞の境界部分で散乱し, 広がっている. 図-4でも同様の現象が見られるが, こちらではより震源に近い境界上で振幅の高い散乱波が生じていることがわかる.

また図-3, 図-4 両方の結果において, 空洞の内部に散乱波が生じていたり, 加振点から空洞の中心に伸ばした延長線上で振幅の高い散乱波が発生している様子が見受けられる. これは, 散乱波の計算結果は入射波に影響するという領域積分方程式の特徴を表しているためと考えられる. 他の解析手法を用いた結果と比較することで, 本手法による解析結果がどの程度の精度を有しているのか検討することが今後の課題である.

4 結論

本紙では, 弾性波動場における境界積分方程式をデルタ関数を用いて拡張し, 領域積分方程式として解く手法について述べた. これにより, 弾性波動場における境界積分方程式を解く際にも, 本研究室で開発を行っている領域積分方程式の高速解法の適用が可能となることを示した. しかしながら, 数値解析の結果としては空洞内部に変位が生じてるなどの問題が残されており, 解析結果の検証, および更なる精度の向上が求められる. これからの課題としては, 境界要素法などの他の解析手法を用いて数値計算を行い, 本手法の解析結果の妥当性を検証することが必要と考えられる.

5 参考文献

- 1) Touhei Terumi: Generalized Fourier transform and its application to the volume integral equation for elastic wave propagation in a half space, International Journal of Solids and Structures Vol 46, 2009.
- 2) Touhei Terumi, Taku Kiuchi, Kentaro Iwasaki: A fast volume integral equation method for the direct/inverse problem in elastic wave scattering phenomena, International Journal of Solids and Structures Vol 46, 2009.
- 3) 藤野清次, 張紹良: 反復法の数理, 応用数値計算ライブラリー, 朝倉書店, 1996.
- 4) 和島泰亮, 東平光生: 最急降下法を用いた点加振で生じる地中深部へ伝わる実体波の伝播特性の検討, 土木学会全国大会第 65 回年次学術講演会論文, 2010.