

3次元異方性弾性波動解析のための 演算子積分時間領域境界要素法

○東京工業大学大学院
東京工業大学大学院
東京工業大学大学院

正会員
学生会員
正会員

斎藤隆泰
田中遊雲
廣瀬壮一

1. はじめに

境界要素法は無限領域を容易に扱うことができることから、スカラー波動問題や弾性波動問題等の様々な波動問題に適用されてきた。しかしながら、3次元異方性弾性波動問題に対する境界要素法を用いた解析例は数少ない。この理由は、時間領域境界要素法自体の数値解導出の構成が非常に複雑であることに加え、基本解が単位球面上に関する積分¹⁾を含み、数値的扱いが難解であることが挙げられる。そこで、本研究では、3次元異方性弾性波動解析のための新しい時間領域境界要素法の定式化を示す。本定式化により、従来の方法よりも容易に解析を実行することが可能となる。

2. 3次元異方性弾性波動問題における時間領域境界要素法

以下では、直交座標系 (x_1, x_2, x_3) を用い、右下添字のローマ文字は総和規約に従うとする。さて、図1のような3次元異方性無限弾性体中の散乱体 D による入射波 u_i^{in} の散乱問題について考える。変位 u_i や表面力 t_i といった物理量は、波動が到達するまでは一切の擾乱が起らない静止過去の条件を満足するものとする。このとき、全変位 $u_i(\mathbf{x})$ に対する時間領域境界積分方程式は次のように書ける。

$$C_{ij}u_j(\mathbf{x}) = u_i^{\text{in}}(\mathbf{x}, t) + \int_S U_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) * t_j(\mathbf{y}) dS_y - \int_S T_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) * u_j(\mathbf{y}) dS_y \quad (1)$$

ここで、 C_{ij} はいわゆる自由項で²⁾、 $U_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)$ 、 $T_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)$ はそれぞれ3次元異方性弾性波動問題における時間領域基本解および対応する二重層核である。また $*$ は時間に関する畳込み積分を表す。通常は、Wang と Achenbach¹⁾ によって導かれた時間領域基本解 $U_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)$ 、 $T_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)$ を直接用いた時間ステップ解法を用いることで、式(1)の時間領域境界積分方程式を解くことができる。

3. 演算子積分法を用いた新しい定式化

(1) 境界積分方程式の離散化

本研究では、式(1)の時間領域境界積分方程式を離散化するために、Lubich が提案した演算子積分法 (CQM: Convolution Quadrature Method)³⁾ を用いる。Lubich は、畳込み積分 $f(t) * g(t)$ を、 $f(t)$ のラプラス変換を用いて離散化近似することにより、畳込み積分を数値的に安定に解く方法

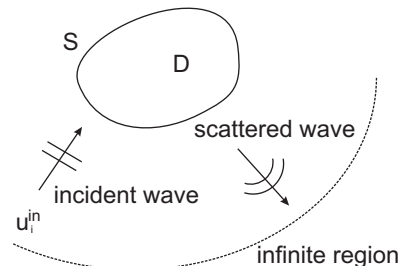


図1 解くべき問題。

を提案した。今、式(1)において、時間増分を Δt 、境界 S を M 個の境界要素(要素内で変位や表面力は一定と仮定)で離散化し、演算子積分法を適用すれば、次の式を得ることができる。

$$\frac{1}{2}u_i(\mathbf{x}, n\Delta t) = u_i^{\text{in}}(\mathbf{x}, n\Delta t) + \sum_{\alpha=1}^M \sum_{k=1}^n [A_{ij}^{n-k}(\mathbf{x}, \mathbf{y}^\alpha) t_j^\alpha(k\Delta t) - B_{ij}^{n-k}(\mathbf{x}, \mathbf{y}^\alpha) u_j^\alpha(k\Delta t)] \quad (2)$$

ただし A_{ij}^m および B_{ij}^m は影響関数であり、

$$A_{ij}^m(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\mathcal{R}^{-m}}{L} \sum_{l=0}^{L-1} \int_S \hat{U}_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, s_l) e^{-\frac{2\pi i m l}{L}} dS_y \quad (3)$$

$$B_{ij}^m(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\mathcal{R}^{-m}}{L} \sum_{l=0}^{L-1} \int_S \hat{T}_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, s_l) e^{-\frac{2\pi i m l}{L}} dS_y \quad (4)$$

で表わされる。式(3)、(4)中の s_l は $s_l = \delta(\zeta_l)/\Delta t$ であり L 、 $\mathcal{R}$ 、 $\delta(\zeta_l)$ は演算子積分法によるパラメータである³⁾。一方、 $\hat{U}_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, s)$ 、 $\hat{T}_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, s)$ はラプラス変換域における3次元異方性弾性波動問題における基本解および二重層核である。

(2) ラプラス変換域基本解の扱い

等方性弾性波動問題の基本解は、特異性を有する静的部分と正則な動的部分に分離することができる。この関係は、ラプラス変換域における3次元異方性弾性波動問題に対する基本解に対しても同様に成り立つ。例えば、式(3)の基本解 $\hat{U}_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, s)$ は、静的部分を $\hat{U}_{ij}^S(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ 、動的部分を $\hat{U}_{ij}^D(\mathbf{x}, \mathbf{y}, s)$ とすれば、次のように表すことができる。

$$\hat{U}_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, s) = \hat{U}_{ij}^S(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \hat{U}_{ij}^D(\mathbf{x}, \mathbf{y}, s) \quad (5)$$

$$\hat{U}_{ij}^S(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{8\pi^2 r} \int_{|\mathbf{n}|=1} \Gamma_{ij}^{-1}(\mathbf{n}) dS(\mathbf{n}) \quad (6)$$

Key Words: 異方性材料, 弾性波動解析, 境界要素法

〒152-8552 東京都目黒区大岡山 2-12-1-W8-22

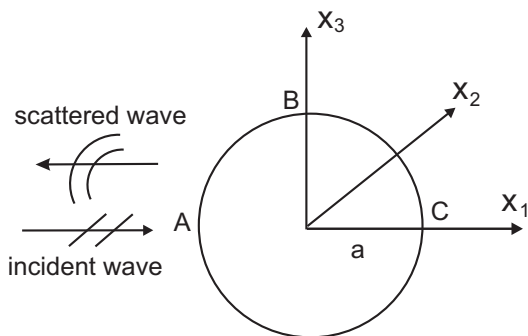


図2 解析モデル.

$$\hat{U}_{ij}^D(\mathbf{x}, \mathbf{y}, s) = -\frac{1}{8\pi^2} \int_{|\mathbf{n}|=1} \sum_{m=1}^3 \frac{sE_{im}E_{jm}}{\rho c_m^2} e^{-s|\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}|} dS(\mathbf{n}), \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{x} > 0 \quad (7)$$

ここで, ρ は密度, c_m は3次元異方性弾性体中を伝搬する波動の波速, s は $s = s/c_m$ で表わされる. また, 式(6)中の $\Gamma_{ij}(\mathbf{n})$ は Christoffel テンソルと呼ばれ, 単位球面を表す単位ベクトル $\mathbf{n}$ を用いて $\Gamma_{ip}(\mathbf{n}) = C_{ijpq}n_jn_q$ で表される. ここで C_{ijpq} は弾性定数を表す. 一方, 式(7)中の E_{im} は 3×3 の行列 Γ_{ip} に対して求まる固有値 λ_m に対応する固有ベクトルを表す. 二重層核に対しても同様に, 分離して表すことができる(ただし, 本概要では紙面の都合上割愛する).

これまで見たように, 本定式化では, 時間領域基本解を用いず, より扱いやすいラプラス変換域基本解を用いている. また, 境界積分方程式(2)は時間ステップ分だけ解く必要あるが, 各ステップ毎の計算は周波数領域の解析と同様の手順で扱える. そのため, 時・空間を直接離散化する従来法と比べ, 比較的容易に数値解を求めることができる.

4. 精度の確認

以下, 計算精度の確認のため, 簡単な数値解析例を示す. 図2のような均質等方な無限弾性体中の半径 a の空洞による入射波の散乱問題について考える. 本手法を用いてこの問題を解析する場合は, 弾性定数 C_{ijkl} について等方性材料の値を用いることで, 等方性の結果を導くことができる. 一方, Pao と Mow の解析解を逆フーリエ変換することで時間領域の解を導出することも可能である. そこで, ここでは両者の解を比較することで本手法の精度を確認する. 解析においては, 空洞を要素数 512 の三角形一定要素で離散化し, 時間増分は $c_L \Delta t/a = 0.08$, 総時間ステップ数を $N = 32$ とした. ただし c_L は等方弾性体中の縦波速度であり, ポアソン比を 0.25 とした. このとき, 横波速度 c_L に対して $c_L/c_T = \sqrt{3}$ が成り立つ. 一般的に異方性の計算においては, 弾性定数 C_{ijkl} を Voigt 表記による $C_{\alpha\beta}$ ($\alpha, \beta = 1, \dots, 6$) で表記する場合が多い. その場合, 等方弾性体におけるラメ定数 λ, μ に

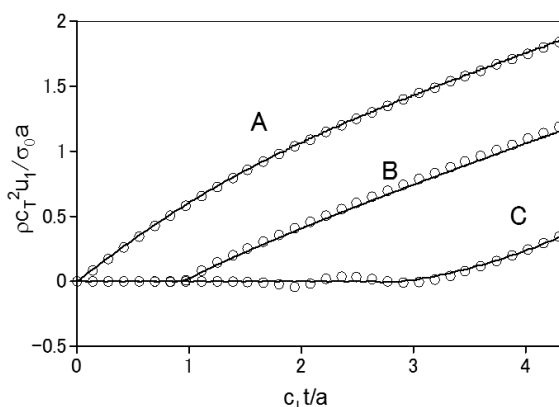


図3 A, B, C 点における変位の時刻歴波形.

対して $C_{11} = C_{22} = C_{33} = \lambda + 2\mu$, $C_{12} = C_{13} = C_{21} = C_{23} = C_{31} = C_{32} = \lambda$, $C_{44} = C_{55} = C_{66} = \mu$ なる値を持つ. 演算子積分法のパラメータは $L = 32$, $\mathcal{R} \approx 0.6$ とした. また, 入射波は

$$u_i^{\text{in}}(\mathbf{x}, t) = \delta_{i1} \frac{\sigma_0}{\rho c_L^2} (c_L t - x_1 - a) H[c_L t - (x_1 + a)] \quad (8)$$

で与えた. ただし, δ_{ij} はクロネッカーデルタ, σ_0 は応力振幅, H はステップ関数である. 図3は図2中の A, B, C 点における x_1 方向の変位の時刻歴波形を表している. 記号が本手法による数値解, 実線は Pao と Mow の解析解を逆フーリエ変換することによって得られた数値解である. 両者は概ね一致していることがわかる.

なお, 本研究では, OpenMP による 16 スレッドの並列化を行い, およそ 6.7 時間の計算時間を要した. 総時間ステップ数が $N = 32$ と少ないにも関わらず, 多大な計算時間を必要としており, 何らかの方法で計算時間を削減することもある検討が必要があると思われる.

5. まとめ

本研究では, 演算子積分法を用いた異方性弾性波動問題のための新たな 3 次元時間領域境界要素法の定式化を行った. 簡単な数値実験より, 計算精度を確認した. 今後は, 具体的に異方性材料のパラメータを与えた弾性波動解析を行いつつ, 計算時間の短縮を行うことが課題となる. なお, 3 次元異方性弾性波動問題のラプラス変換域基本解が 2 次元問題のそれに比べて比較的扱いやすいため, 演算子積分法の異方性弾性波動問題への適用に関する研究をまず 3 次元問題からスタートしたが, 2 次元問題への適用も今後の課題である.

参考文献

- 1) Wang, C.-Y. and Achenbach, J. D.: Elastodynamic fundamental solutions for anisotropic solids, *Geophys. J. Int.* **118**, pp.384-392, (1994)
- 2) 小林昭一編著: 波動解析と境界要素法, 京都大学学術出版会, (2000).
- 3) Lubich, C.: Convolution quadrature and discretized operational calculus I, *Numer. Math.*, **52**, pp. 129-145, (1988).