

鋼 I 桁橋の座屈破壊確率に対する確率分布の影響に関する subset 法と MCMC を用いた検討

長崎大学工学部 正 会 員 中村 聖三

長崎大学大学院 学生会員 ○宮田 喜生

長崎大学工学部 フェロー 高橋 和雄

1. まえがき

現在、道路橋の設計には許容応力度法が用いられているが、要求された性能を満たすことを合理的に検証する手段として、信頼性設計の考え方を基礎とする限界状態設計法の導入が求められている。信頼性設計では、部分係数の決定等において信頼性指標 β を用いるが、構造物の諸元や設計変数の確率分布形が異なれば、 β の値が同じでも破壊確率は一般に異なる。破壊確率の算定方法としては、モンテカルロシミュレーションが考えられるが、構造物の破壊確率のように極めて小さい確率の現象を対象とする場合、非常に計算時間がかかるという難点がある。本研究では、鋼 I 桁橋を対象に設計変数の確率分布形を変化させ、subset 法とマルコフ連鎖モンテカルロシミュレーション(以下、MCMC と記す)を用いて破壊確率を算定することにより、当該部材の破壊確率に対する確率分布形の影響を明らかにする。

2. 破壊確率の算定方法^{1), 2)}

破壊確率の算定方法を以下に簡単に説明する。確率変数の空間内の破壊領域を F とし、破壊確率を $P(F)$ とする。ここで、全体集合を F_0 、その部分集合を $F_i (i=1, 2, \dots, m)$ と表し、 $F_m = F$ とする。

$$F_0 \supset F_1 \supset F_2 \supset \dots \supset F_m = F \quad (1)$$

破壊確率はこれらの部分集合を用いることにより次式で算定できる。

$$P(F) = P(F_m) = P(F_m | F_{m-1})P(F_{m-1} | F_{m-2}) \cdot \dots \cdot P(F_1 | F_0) \quad (2)$$

限界状態関数 $z(\mathbf{x})$ 、確率変数ベクトル $\mathbf{x}$ の確率密度分布が与えられるとし、破壊状態を $z < 0$ と定義して、破壊確率を算定する。計算手順を以下に示す。

- 1) 確率変数の密度関数に従って、 n_i 個のサンプルを通常のモンテカルロシミュレーションと同様に発生させ、それぞれの限界状態関数の値を求める。部分空間のカウンターを $i=0$ とする。
- 2) 限界状態関数の値を小さい順に並べ、 $z_1, z_2, z_3, \dots$ とする。 $P(F_{i+1}|F_i) = n_s / n_i$ となる部分空間 F_{i+1} を次式で定義する。

$$F_{i+1} = \{\mathbf{x} | z(\mathbf{x}) < C_{i+1}\}, \quad C_{i+1} = \frac{z_{n_s} + z_{n_{s+1}}}{2} \quad (3)$$

- 3) MCMC によって、部分空間 F_{i+1} 内に n_i 個のサンプルを発生させる。サンプルの発生方法については文献 1), 2) を参照されたい。
- 4) $z < 0$ となるサンプルの個数 n_f が十分な場合 ($n_f > n_s$) には終了。そうでない場合は $i=i+1$ として手順 2) から繰り返す。

以上の手順により損傷が生じたサンプルが十分得られたら、次式によって破壊確率を求めることができる。

$$P(z < 0) = (n_s / n_i)^i (n_f / n_i) \quad (4)$$

ここで、 n_s は部分空間の大きさを決めるパラメータである。

3. 検討概要

ばらつきを考慮する確率変数は正規分布、対数正規分布、あるいはワイブル分布に従うものと仮定した。解析

キーワード：マルコフ連鎖モンテカルロシミュレーション、subset 法、破壊確率、確率分布

連絡先：〒852-8521 長崎市文教町 1-14 長崎大学工学部社会開発工学科 Tel:095-819-2613 Fax:095-819-2627

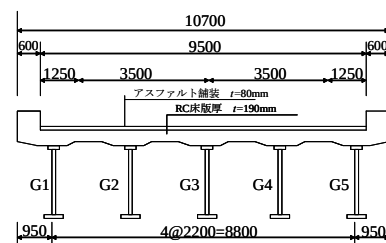


図-1 解析断面 1(支間長 20m)

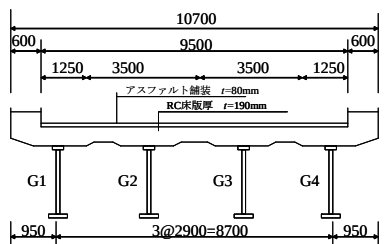


図-2 解析断面 2(支間長 40m)

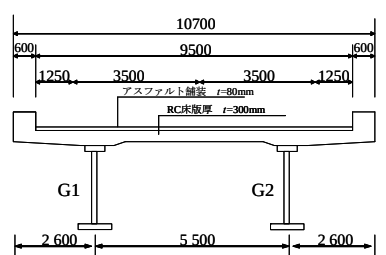


図-3 解析断面 3(支間長 50m)

表-1 確率変数

不確定要因	平均値 基準値	標準 偏差
鋼材降伏強度 σ_y	1.232	0.1011
コンクリート床板厚	1.050	0.0138
板厚 t	1.0017	0.0121
鋼材ポアソン比	0.937	0.085
鋼材弾性係数	0.999	0.045

対象は、図-1～図-3の断面を持つ鋼I桁橋とし、支間中央部での主桁の合成前の座屈について解析を行った。着目する主桁は、断面1に対しては許容応力度の余裕が最も小さくなっていたG2とし、断面2に対してはG1とした。断面3については左右対称であることからG1、G2ともに同じ条件となる。材料降伏点 σ_y 、コンクリート床版重量、鋼材の板厚、鋼材ポアソン比 μ 、鋼材弾性係数 E を確率変数とし、式(5)に示す限界状態関数を用いた。また、各確率変数の統計量は表-1のように決定した³⁾。鋼材降伏点や板厚のように確率変数に上下限值がある確率変数では、発生させた乱数が上下限値を超えた場合には再度乱数を発生させて確率変数が制限値内になるようにした。板厚の許容差はJIS G3193によるものとした。

$$Z = \sigma_y \min \left(\frac{\sigma_{cr}}{\sigma_y}, \frac{\sigma_{clb}}{\sigma_y} \right) - \frac{M_s}{I_s} y_{sc} \quad (5)$$

ここで、 σ_{cr}/σ_y は局部座屈強度、 σ_{clb}/σ_y は横倒れ座屈強度であり、それぞれ以下のとおりである。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\sigma_{cr}}{\sigma_y} &= 1.0 & (R \leq 0.7) \\ \frac{\sigma_{cr}}{\sigma_y} &= \frac{0.5}{R^2} & (0.7 < R) \end{aligned} \right\} \quad \text{ここで } R = \frac{b}{t} \sqrt{\frac{\sigma_y}{E} \frac{12(1-\mu^2)}{\pi^2 k}}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\sigma_{clb}}{\sigma_y} &= 1.0 & (\alpha \leq 0.2) \\ \frac{\sigma_{clb}}{\sigma_y} &= 1.0 - 0.412(\alpha - 0.2) & (0.2 < \alpha) \end{aligned} \right\} \quad \text{ここで } \alpha = \frac{2}{\pi} K \sqrt{\frac{\sigma_y}{E} \frac{l}{b}}, \quad K = \begin{cases} 2 & (A_w/A_c \leq 2) \\ \sqrt{3 + \frac{A_w}{2A_c}} & (A_w/A_c > 2) \end{cases}$$

表-2 確率変数

	確率分布形	正規	対数正規	ワイブル
断面1	破壊確率	1.08E-12	8.60E-14	3.58E-07
	信頼性指標 β	5.37	5.34	5.71
	式(8)で計算した破壊確率	3.87E-08	4.77E-08	5.51E-09
断面2	破壊確率	1.59E-12	3.06E-14	3.82E-07
	信頼性指標 β	5.35	5.29	5.71
	式(8)で計算した破壊確率	4.52E-08	6.22E-08	5.83E-09
断面3	破壊確率	7.48E-14	1.48E-16	1.72E-07
	信頼性指標 β	5.52	5.44	5.93
	式(8)で計算した破壊確率	1.70E-08	2.63E-08	1.54E-09

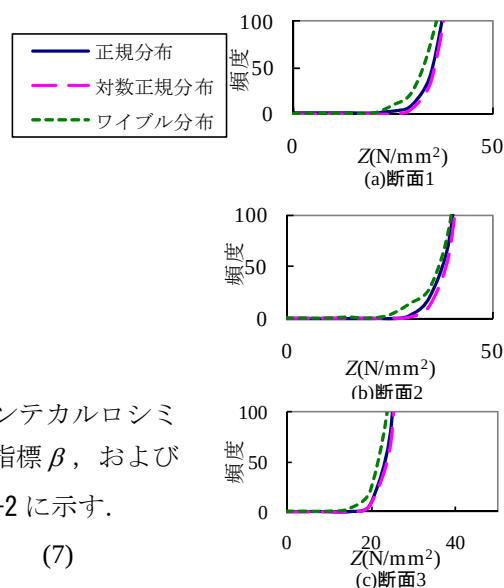


図-4 Zのヒストグラム

4. 検討結果と考察

解析によって破壊確率を30回求めて算定した平均値 $\bar{Z}$ 、通常のモンテカルロシミュレーションでサンプルを50,000個発生させ、式(6)で求めた信頼性指標 β 、および式(7)で求めた Z が正規分布と仮定した場合の β に対する破壊確率を表-2に示す。

$$\beta = \bar{Z}/\sigma_z \quad (6) \quad p = 1 - \Phi(\beta) = \Phi(-\beta) \quad (7)$$

いずれの断面においても、信頼性指標 β は分布形が異なってもあまり変化していない。また、式(7)で求められる破壊確率の変化は、最大でも14倍程度である。一方、シミュレーションで求めた破壊確率は確率分布形によって大きく変わっており、最大で 1.2×10^9 程度も変化している。そのため、破壊確率に対する確率分布形の影響は大きいといえる。ワイブル分布については、 β の値が他の分布形に比べ大きいにもかかわらず、本研究で求めた破壊確率も他より大きくなっていることが確認できる。このことから、同じ信頼性指標を確保するように設計しても、確率分布形によって破壊確率が大きく異なると言える。図-4に、各断面の限界状態関数 Z が0付近の Z のヒストグラムをそれぞれの確率分布ごとに示す。ヒストグラムの裾野を比較すると、どの断面の場合でも対数正規分布の裾野が最も狭くなっているため破壊確率が小さくなるのに対し、ワイブル分布の裾野が最も広がっているため、破壊確率が大きくなることが理解できる。

5. まとめ

破壊確率に対する確率分布形の影響は非常に大きく、確率分布形が異なれば β の値が同じでも破壊確率は大きく異なる可能性がある。今後の課題として、各設計変数の破壊確率に対する感度を検討することや同じ破壊確率を確保するために必要な断面の違いを明確にすること等が挙げられる。

参考文献

- 1) Furuta, H., Miyake, K., Sato, T. and Tsukiyama, I.: Reliability Analysis Using Markov-Chain Monte Carlo Simulation, Proceedings of the 9th Korea-Japan Joint Symposium on Steel Bridges, pp.17-28, 2007.8
- 2) 吉田郁政, 佐藤忠信: MCMCを用いた損傷確率算定方法, 土木学会論文集, No.794/I-72, pp.43-53, 2005.7
- 3) 吉田遼一, 中村聖三, 高橋和雄: 鋼I桁橋の信頼性指標 β に対する確率分布形の影響, 鋼構造年次論文報告集, 第15巻, pp.169-174, 2007.11