

混合型剛塑性有限要素法におけるアワグラス・ロッキング制御について

京都大学 正員 ○西藤 潤
金沢大学 正員 小林俊一

1. はじめに

剛塑性有限要素法には一般に変位型と混合型の二種類の定式化がある．混合型による剛塑性有限要素法は，Zouain ら¹⁾や小林ら²⁾によって非線形最適化問題の枠組みとして定式化された．これらの定式化においては，要素内一定応力を仮定しており，数値積分は要素内1点で行う．この方法（これ以降従来法と呼ぶ）では3角形要素を用いるとロッキングが起き，正しい荷重係数や応力状態が得られない．また，4角形要素を用いるとアワグラスモードが生じ，正しい崩壊メカニズムが得られない．そこで，本研究では混合型剛塑性有限要素法において要素改良によって，アワグラス，ロッキングの抑制を試みた．

2. 混合型剛塑性有限要素法の定式化

剛塑性解析として「系が塑性崩壊に至る荷重を評価する剛塑性境界値問題」を取り上げて説明する．剛塑性体に準静的な荷重を与えたときの剛塑性境界値問題を図-2. に示す．領域 D は剛完全塑性体であり，境界は変位速度境界 S_u と応力境界 S_σ からなる．変位速度境界 S_u は変位速度を0とする斉次ディレクレ条件のみを考える．応力境界または内部において系に荷重として，評価したい崩壊荷重 αb_1 と一定荷重 b_0 が作用するものとする．ここに α は荷重係数， b_1, b_0 は荷重パターンである．

下界定理より「荷重系に対して力の釣合い式と応力境界条件を満足する応力場（静力学的許容な応力場）が降伏条件を破らないとき（可容なとき），荷重係数 α は下界値を与える」ことが知られている．つまり，以下の非線形最適化問題として定式化できる．

$$\begin{aligned} \min_{\sigma, \alpha} \quad & -\alpha \\ \text{subject to} \quad & \begin{cases} \alpha b_1 + b_0 = B^T \sigma \\ f(\sigma) \leq 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (1)$$

B は釣合い式を構成するマトリクス， σ は応力を表すベクトルである． $f(\sigma)$ は降伏関数であり，応力に関する凸

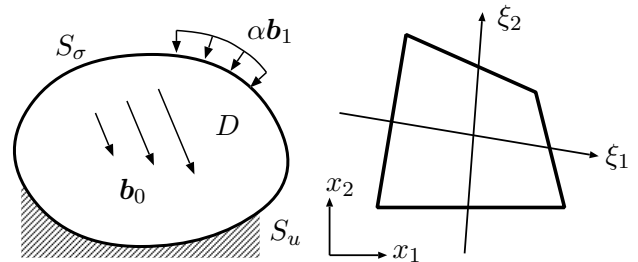


図-1: 剛塑性体の境界値問題 図-2: 全体座標系と自然座標系

関数と仮定する．この非線形最適化問題 (1) を Newton 法などで解けば解の近似値が得られる．

3. アワグラスおよびロッキングの回避

提案手法では，4 節点 4 角形要素を用い，積分点は要素内 2×2 点で数値積分を行う．要素 e における応力の共変成分 $\tilde{\sigma}_{ij}$ を次式に示すように 5 つの未知数によって定義する．

$$\tilde{\sigma}^e(\xi_1, \xi_2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \xi_2 \\ 0 & 1 & 0 & \xi_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \beta_1^e \\ \beta_2^e \\ \beta_3^e \\ \beta_4^e \\ \beta_5^e \end{Bmatrix} \quad (2)$$

ξ_1, ξ_2 は自然座標系を表している．式 (2) は，自然座標系 ξ_1, ξ_2 を用いて，応力を多項式近似した式とみることができる．応力をこのように定式化を進めるとアワグラス・ロッキングが回避可能となる．

4. 数値解析例

提案するアワグラスモードとロッキングの回避法を検証するため，「浅い基礎の支持力解析」と「内圧を受ける圧肉円筒管」の問題を解いた．

(1) 浅い基礎の支持力解析

自重を無視できる剛塑性材料の半無限領域を考え，その表面に等分布荷重 q を与えて塑性崩壊時の極限荷重 q_c を求める．降伏基準は平面ひずみ状態における Mohr-Coulomb の降伏基準を用いる．解析は対称性を利用して $1/2$ の領域のみを扱う．解析に用いたメッシュを図-3 に示す．側方の境界は横方向のみを固定したスライダー，底面の境界は固定とする．メッシュ(a)では本論文の提

Key Words: hourglass mode, locking, rigid-plastic finite element analysis

〒 617-0821 京都府京都市西京区京都大学桂 C1

案手法を，メッシュ(b)では Nagtegaal らの方法³⁾を用いる．

解析の結果と変位速度の自由度を表-1 に示す．提案手法では，少ない要素数で正解に近い値が得られているのが分かる．一方で3角形要素を用いた従来法ではロッキングのため，正解よりも大きな値が得られている．

(2) 内圧を受ける厚肉円筒管の塑性解析

図-4 に示すように内径 a ，外形 b の厚肉円筒管に内側から等方圧 q を作用させ，系が崩壊する崩壊荷重 q_c を求める．平面ひずみを仮定し，Mohr-Coulomb の降伏基準を用いる．解析では対称性から $1/4$ の領域のみを扱う．

内部摩擦角 $\phi = 0^\circ, 30^\circ$ に対して求めた崩壊荷重を表-2 に示す．本手法では，理論解に近い値が得られていることが分かる．図-6 に塑性崩壊時のメカニズムを示す．点線が初期の形状で太線が崩壊メカニズムである．比較のため，4角形要素を用いた要素内で一定応力を仮定する従来法による崩壊メカニズムを図-7 に示す．提案手法では，外側に一様に变形しておりアワグラスモードは発生していないことが分かる．一方で従来法はアワグラスモードが顕著に表れており，正しい崩壊メカニズムが得られていない．

5. さいごに

本論文ではアワグラスおよびロッキングを制御する手法として新しい要素を提案した．その結果，要素内の応力の離散的表現を工夫すれば，これまでの混合型解法の枠組みでアワグラスとロッキングを制御できることを確認した．また，提案した手法を検証するため，いくつかの例題を解いた．その結果，理論解や既往の研究と良好な一致を示す数値解が得られることを確認した．

謝辞： なお本研究の一部は平成 21 年度科学研究費補助金（基盤研究（C）20560461）の補助を受けた．ここに記して謝意を表する．

参考文献

- 1) Zouain, N., Herskovits, J., Borges, L. A. and Feijó, R. A. : An iterative algorithm for limit analysis with nonlinear yield functions, *Int. J. Solids Struct.*, Vol. 30, No. 10, pp. 13971417, 1993.
- 2) 小林俊一：主双対内点法による混合型剛塑性有限要素法の開発，応用力学論文集，土木学会，Vol. 6, pp. 95106, 2003.
- 3) Nagtegaal, J., Parks, D. and Rice, J. : On numerically accurate finite element solutions in the fully plastic range, *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, Vol. 4, No. 2, pp. 153177, 1974.

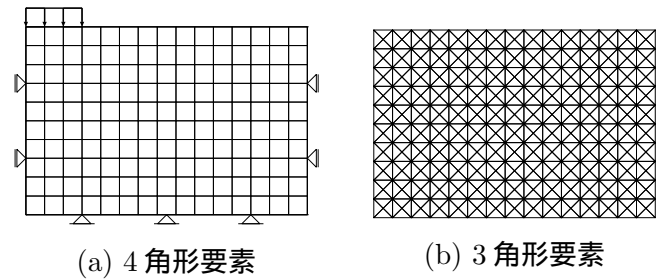


図-3: 解析に用いたメッシュ

表-1: 支持力問題における極限荷重 q_c/c の比較

	q_c/c	自由度
理論解	$\pi + 2 = (5.142)$	—
本手法	5.185	300
Nagtegaal の手法	5.306	600

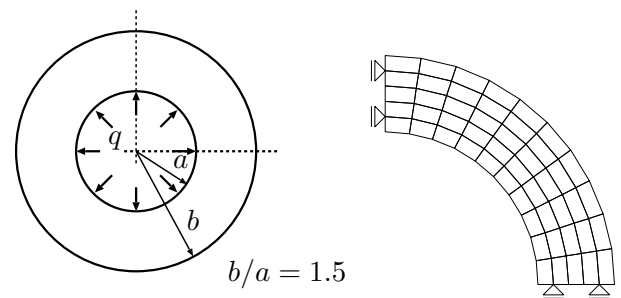


図-4: 内圧の作用する厚肉円筒管 図-5: 厚肉円筒管の解析に用いたメッシュ

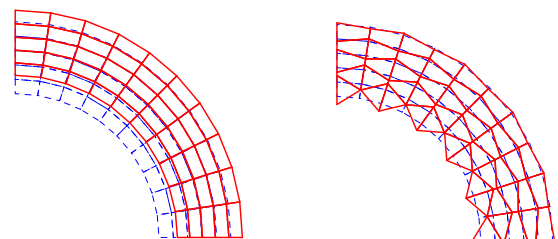


図-6: 崩壊メカニズム (提案手法) 図-7: 崩壊メカニズム (従来法)

表-2: 厚肉円筒管における極限荷重 q_c/c の比較

	$\phi = 0^\circ$	$\phi = 30^\circ$	自由度
理論解	0.8109	0.5376	—
本手法	0.8094	0.5361	120