2 次元移流拡散問題による Hermite 型要素を用いた特性有限要素法

八戸高専専攻科　学生会員　○西澤　瞬　八戸高専　正会員　丸岡　晃

1. はじめに

筆者らは，有限要素法による高精度流体解析のために，移流拡散問題によって，Hermite 型要素を用いた特性有限要素法として，SLG（semi–Lagrange Galerkin）法[1]と，HCG（Hermitian characteristic Galerkin）法[2]を提案してきた．特性有限要素法では，定式化に必要な積分に合成関数が含まれるが，一つの要素に対する合成関数が複数の要素にまたがるため，合成関数の含まれる項の積分に対して数値積分を行うなどの近似が必要になる．HCG 法では，合成関数に対しても Hermite 型要素を構築し，合成関数を一つの多項式として近似，積分計算を簡略化している．一方，筆者らは 1 次元移流拡散問題において各種積分法の比較を行った結果[3]，Hermite 型要素による近似はロバストであるが，数値積分の方が高精度であることを示した．そこで本研究では，2 次元場においても合成関数の含まれる項の積分に数値積分を適用し，検討を行った．

2. 移流拡散方程式

2 次元領域 Ω において，スカラー関数 $u(\boldsymbol{x},\, t)$ に関する移流拡散方程式を考える．

$$\left\{\begin{array}{rll} \dot{u} - \nu\,\nabla^2 u = 0 & & \text{in } \Omega \\ u = 0 & & \text{on } \Gamma \\ u(\boldsymbol{x},\,0) = u^0(\boldsymbol{x}) & & \text{in } \Omega \end{array}\right. \tag{1}$$

ここで，$\boldsymbol{a}$ は移流速度，ν は拡散係数であり，それぞれ一定である．また，$\dot{u}$ は，時間微分項と移流項の和を表し，特性法では以下のような Lagrange 微分の形で定義する．

$$\dot{v} \equiv \frac{\partial v}{\partial t} + \boldsymbol{a}\cdot\nabla v = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} v(X(\boldsymbol{x},\,t;\,\tau),\,\tau)\Big|_{\tau=t} \tag{2}$$

ここで，$X(\boldsymbol{x},\,t;\,\tau)$ は時間 τ での位置 $\boldsymbol{x}$ を起点とする特性曲線上の時間 t での位置である．

3. 離散化手法の概要

特性曲線上の上流点の位置を以下のように定義する．

$$X^n \equiv X(\boldsymbol{x},\, t^{n+1};\, t^n) \tag{3}$$

特性曲線上の $(\boldsymbol{x}, t^{n+1})$ および (X^n, t^n) での関数 v を以下のように定義する．

$$v^{n+1} \equiv v(\boldsymbol{x},\, t^{n+1}), \quad v^n(X^n) \equiv v(X^n,\, t^n) \tag{4}$$

本研究では，特性曲線の上流点位置の計算および式 (1) の時間離散に，Newmark 法を適用する．

上流点位置は，Newmark 法に基づき，以下のような反復計算により求める．

$$\left\{\begin{array}{rl} X_m^n = & \!\!\boldsymbol{x} - \Delta t\,\boldsymbol{a}(X_{m-1}^n) - (\frac{1}{2}-\beta)\Delta t^2\,\dot{\boldsymbol{a}}(X_{m-1}^n) \\ & - \beta\Delta t^2\,\dot{\boldsymbol{a}}^{n+1} \quad (m = 1, 2, \cdots, m_{\max}) \\ X_0^n = & \!\!\boldsymbol{x} - \Delta t\,\boldsymbol{a}^{n+1} + \frac{\Delta t^2}{2}\,\dot{\boldsymbol{a}}^{n+1} \end{array}\right. \tag{5}$$

本研究では，$m_{\max} = 2$ とする．

Newmark 法による式 (1) の時間離散は次のように表される．

$$u^{n+1} = u^n(X^n) + (1-\gamma)\,\Delta t\,\dot{u}^n(X^n) + \gamma\,\Delta t\,\dot{u}^{n+1} \tag{6}$$

$$\dot{u}^{n+1} - \nu\,\nabla^2 u^{n+1} = 0 \tag{7}$$

$\beta = \frac{1}{6}$，$\gamma = \frac{1}{2}$ のとき，線形加速度法と一致し，本研究ではこのように設定している．また，このときの計算精度は，上流点位置の計算が 3 次精度となり，式 (1) の時間離散が 2 次精度となる．

本研究では，式 (6) の合成関数の項のみを $\tilde{u}$ とおき，先に求める以下のようなアルゴリズムを適用する．

$$\tilde{u} = u^n(X^n) + (1-\gamma)\,\Delta t\,\,\dot{u}^n(X^n) \tag{8}$$

$$\dot{u}^{n+1} - \nu\,\nabla^2\left(\tilde{u} + \gamma\,\Delta t\,\dot{u}^{n+1}\right) = 0 \tag{9}$$

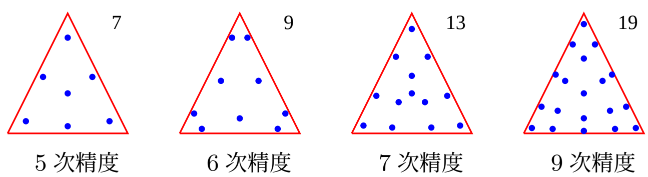
$$u^{n+1} = \tilde{u} + \gamma\,\Delta t\,\dot{u}^{n+1} \tag{10}$$

有限要素に三角形要素の頂点での関数値とその一階導関数値，さらに要素の重心での関数値を自由度とする Hermite 型 3 次要素を用いる．

空間離散には，特性有限要素法（characteristic Galerkin 法）を用いる．特性有限要素法による定式化において必要な合成関数の積分は，式 (8) の空間離散式のみで現れる．

4. 合成関数の含まれる項の積分

要素ごとの合成関数は 1 つの多項式で表せないため，積分計算に工夫が必要である．本研究では，要素ごとに**図–1** のように積分点を配置する数値積分を適用する．要素ごとに配置する積分点数は，7，9，13，19 点としている．



図–1 三角形要素の積分点数

Key Words: *CFD, FEM, characteristic Galerkin, Hermite*
〒039–1192 青森県八戸市大字田面木字上野平 16–1
TEL:0178–27–7304, FAX:0178–27–7316

5. 数値実験

(1) 計算条件

回転流れ場（$\boldsymbol{a}=(-y,\,x)$）において以下の解析解をもつ2次元移流拡散問題を対象とする．

$$u(\boldsymbol{x},\,t)=\frac{\sigma}{\sigma+4\nu t}\exp\left(-\frac{|\overline{\boldsymbol{x}}-\boldsymbol{x}_c|^2}{\sigma+4\nu t}\right) \tag{11}$$

$$\overline{\boldsymbol{x}}=(x\cos t+y\sin t,\,-x\sin t+y\cos t) \tag{12}$$

ここで，$\boldsymbol{x}_c=(0.25,0)$，$\sigma=0.01$ とする．

領域 $\Omega=(-1,\,1)\times(-1,\,1)$，最終時間 $T=2\pi$ とする．

空間離散は，領域 Ω の一辺の分割数を N とする不規則的な三角形要素分割とし，$N=16,32,64,128$ と変化させる．時間離散は $\Delta t=T/(10N)$（以下，S）と $\Delta t=T/N$（以下，L）について行う． また，拡散については $\nu=10^{-3},10^{-4},10^{-5},0$ の場合について行う．

(2) 計算結果

図–2 に Δt が S の場合，**図–3** に Δt が L の場合の Δt と相対誤差の関係を示す．S の場合の $\nu=0$ の7点積分の値がプロットされていないが，これは全ての分割数で計算が発散したためである．

S において，$\nu=0$ と $\nu=10^{-5}$ の場合には，７点積分では計算が発散してしまい，積分点数が不足していることがわかる．拡散なし，またはない状態に近い場合には，少なくとも９点積分が必要である．しかし，$\nu=10^{-3}$ と $\nu=10^{-4}$ の場合には，７点積分でも十分な計算が可能である．また，S の場合には，積分点数を増加させるほど高精度な計算が可能である．

L の場合には，拡散の有無に関わらず，７点積分で安定した計算が可能であり，積分点数を増加させても精度の変化は見られない．

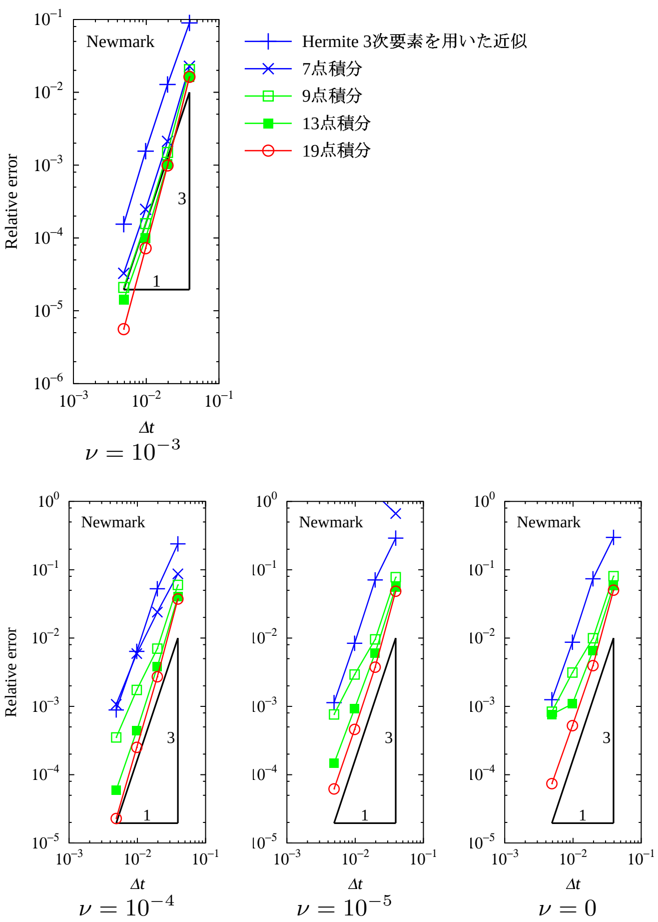
数値積分を用いる場合, 適切な積分点数を用いれば, HCG 法よりも一次精度の高い４次の勾配となる．

6. おわりに

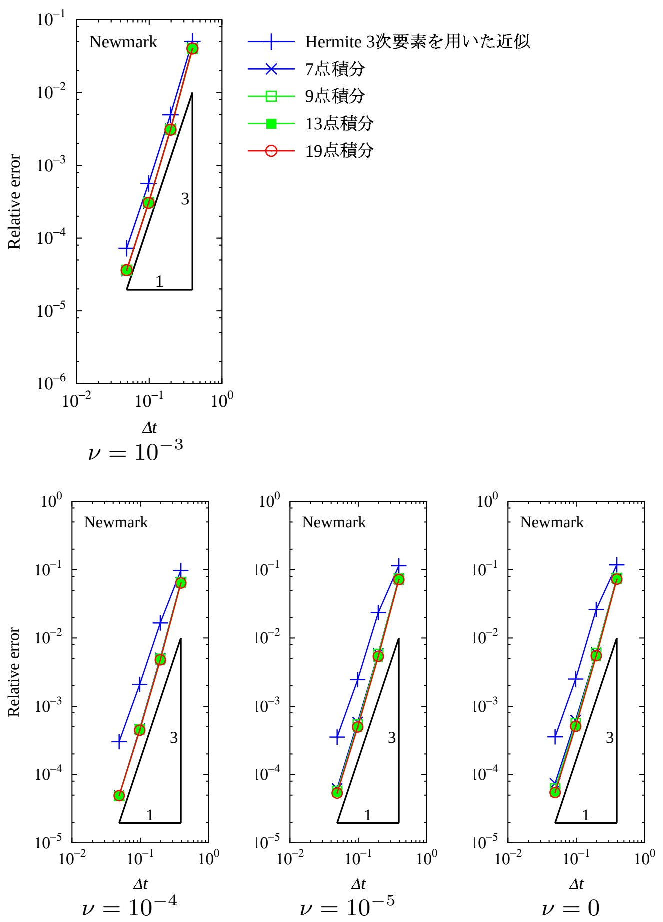
本研究では，２次元移流拡散問題による Hermite 型要素を用いた特性有限要素法における合成関数の含まれる項の積分に数値積分を適用し，検討を行った．その結果，時間増分が小さい場合，拡散があるときには積分点数が少なくても計算可能であり，積分点数の増加に伴い，精度が増すことがわかった．また，時間増分が大きい場合，少ない積分点数で計算可能であることがわかった．以上により，数値積分でも適切な積分点数を用いれば，高精度な計算が可能である．

参考文献

1) 丸岡, 小保内, 奥村, 移流拡散問題における Semi-Lagrange Galerkin 法, ながれ, 27, 2008, 143–152.
2) 丸岡, 小保内, 奥村, 移流拡散問題における Hermitian Characteristic Galerkin 法, Transactions of JSCES, 20080017.
3) 丸岡, 奥村, 西澤, Hermite 型要素を用いた特性有限要素法の合成関数の積分について, 土木学会年講, 64, cs8-007, 2009.



図–2 Δt と相対誤差の関係図（ケース: S）



図–3 Δt と相対誤差の関係図（ケース: L）