付帯条件付き多次元移動最小自乗法の開発とその性能評価

琉球大学　正会員　○松原　仁
琉球大学　正会員　　伊良波　繁雄

1.　はじめに

メッシュを必要としない数値解析手法の一つに，SPH(Smoothed Particle Hydrodynamics)法がある．本手法は，モデル生成における労力の大幅な削減が可能であることや，大変形問題を比較的容易に扱える等の利点を有している．一方，解析精度の面でいくつかの問題も抱えている．MLSM(Moving Least Square Method)もまた，メッシュレス解析法の一つであり，SPH 法に適用することで SPH 法の精度が向上することが確認されている．しかしながら，得られた近似関数の値とサンプリング点における値が必ずしも一致しないため，ディレクレ型境界条件の設定が煩雑となる問題点を抱えている．そこで，本研究では，境界条件の設定が容易で，物理的意味を有する粒子パラメータの導入が可能な多次元型移動最小自乗法を提案する．

2.　移動最小自乗法(MLSM)の概要と問題点

ある領域内における任意の評価点での変位 $u^h(x)$の近似関数を次式にて定義する．

$$u^h(x)=\sum_j^m p_j(x)a_j(x)=\{p(x)\}^T\{a(x)\} \tag{1}$$

ここで, mは基底関数の項数, $\{p(x)\}^T$は基底関数，$\{a(x)\}$は未定係数である．MLSM では，次式で定義される重み付き自乗和を最小にするような未定係数を決定する．

$$J=\sum_{j=1}^n W(r)\left[\{p(x_j)\}^T\{a(x)\}-u_j\right]^2 \tag{2}$$

n，$\{x\}$はそれぞれ評価点$\{x\}$の影響領域内における粒子数および座標であり，u_jは粒子 j における変位である．式(2)を$\{a(x)\}$について解き, 式(1)へ代入することにより以下の近似関数が得られる．

$$u^h(x)=\sum_{j=1}^n\left[W(r)\{p(x)\}^T\{A^{-1}(x)\}\{p(x_j)\}\right]u_j=\sum_{j=1}^n\phi_j(x)u_j \tag{3}$$

ここで，$\{A(x)\}$はモーメントマトリックスと呼ばれ，次式にて定義される．

$$A(x)=\sum_{j=1}^n\left[W(r)\{p(x_j)\}\{p(x_j)\}^T\right] \tag{4}$$

式(2)および式(3)から明らかなように，MLS を用いて近似を行う場合，得られた近似関数の値とサンプリング点における値が必ずしも一致しないため，ディレクレ型境界条件の設定が煩雑となる．

3.　付帯条件付き多次元移動最小自乗法(C-MultiMLS)

野口らは，MLS に代わる近似手法として，評価点における内挿された変位の値をその点に離散化された変位の値に拘束する，という付帯条件付きの移動最小自乗法（CLSM）を提案している．CLSM における近似式は次式で表せる．

$$f(x,y)=a_1(x-x_i)+a_2(y-y_i)+f_i \tag{5}$$

ここで，x_i, y_i は評価点の座標値であり，無条件で $f(x_i,y_i)=f_i$ が成り立つ．したがって，MLSM のように解析結果のリカバリング等の特別な処理は必要なく，境界条件設定の負荷を考えると MLSM よりも良い近似法であることが考えられる．

MLSM や CLSM の場合，ある粒子の物理場は多項式にて仮定される．このとき，未定係数の物理的意味はない．しかしながら，一般的に，速度や応力などの物理変数の成分は，複数の物理量と連成している場合が多く，式(1)や式(5)のように単一の物理場に対する MLSM や CLSM では対応できない．

ここでは多次元型の移動最小自乗法を提案することにする．今，l 個の物理量 $f_1(x), f_2(x),\cdots, f_l(x)$が m 個のパラメータ$\alpha_1, \alpha_2,\cdots, \alpha_m$を介して関連付けられているものとする．このとき，粒子 i の関数値と計算値の間に生じる重み付き残差の平方和は次式となる．

$$J=\sum_j^N\left(W(x-x_j,h)\sum_i^l(f_i^h(\mathbf{x}_j)-f_i(\boldsymbol{\alpha})_j)^2\right) \tag{6}$$

ここで，N は近傍粒子数である．したがって，この値が最小であるように$\alpha_1, \alpha_2,\cdots, \alpha_m$を決定すればよい．以上のように，式(6)を用いれば，l 個の物理量を m 個のパラメータを介した移動最小自乗近似が可能となる．

4.　C-MultiMLS の精度（SPH 法との比較）

ここでは, C-MultiMLS の精度を検証する．変位場は，1 次および 2 次近似を想定した．なお，1 次の近似場は次式にて与えられる．

$$\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & -\tilde{y}_i & \tilde{x}_i & 0 & \frac{1}{2}\tilde{y}\\ 0 & 1 & \tilde{x}_i & 0 & \tilde{y}_i & \frac{1}{2}\tilde{x}_i\end{bmatrix}\begin{pmatrix}u_i\\v_i\\\theta_i\\\varepsilon_{xi}\\\varepsilon_{iy}\\\gamma_{ixy}\end{pmatrix} \tag{7}$$

ここで，u_iおよびv_iは粒子 i の並行方向変位，θ_iは粒子

キーワード　SPH 法，MLS 法，多次元 MLS 法
連絡先　〒902-0213　沖縄県中頭郡西原町千原 1 番地
TEL(098)-895-8652

i の回転，ε_{ix}，ε_{iy}，γ_{ixy} はひずみを表わしている．これらの物理パラメータは，i 粒子の近傍にある粒子を用いて，式(6)によって決定することができるが，ここでは頁数の制限により割愛させて頂く．

4.1 片持ち梁の変位場における微分精度

Timoshenko 梁の変位場を用いて梁の弾性エネルギーを評価する．本例題では，Timoshenko 梁の変位量を解析領域内の粒子に直接与えて評価する．解析モデルは，図-1 に示しているように梁の長さが 8，梁せいが 3 であり，ヤング率 E は 1000.0，ポアソン比νは 0.25 を仮定した．また，影響半径は最小粒子距離の 2.4 倍とし，粒子配置は等間隔の場合と不規則の場合を用意した．一般に，有限要素法にて定義されるエネルギー誤差ノルムは，要素ごとの面積積分を必要とする．しかしながら，本研究で扱う粒子法では要素を用いないために，有限要素法のエネルギーノルムは適用できない．そこで，本研究では，各粒子のエネルギー誤差ノルムを次式にて定義する．

$$|e_i| = \sqrt{\left(\boldsymbol{\varepsilon}_i - \boldsymbol{\varepsilon}_i^{exact}\right)^T \left(\boldsymbol{\sigma}_i - \boldsymbol{\sigma}_i^{exact}\right)} \tag{8}$$

ここで，$\boldsymbol{\varepsilon}_i$ は $\boldsymbol{\sigma}_i$ は，それぞれ粒子 i のひずみと応力値，$\boldsymbol{\varepsilon}_i^{exact}$ と $\boldsymbol{\sigma}_i^{exact}$ は，粒子 i のひずみと応力の厳密解である．つぎに，式(8)で表わされるエネルギー誤差ノルムの領域全体におけるばらつきを評価するために，次式で定義される標準偏差を導入する．

$$\mathbf{SD} = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(|e_i| - |\bar{e}|\right)^2} \tag{9}$$

$|\bar{e}|$ はエネルギー誤差ノルムの領域全体における平均値である．図-2 に粒子数と標準偏差の関係を示す．同図より，収束率および精度ともに 2 次近似の C-MultiMLS が最もよく，次いで 1 次近似の C-MultiMLS となっている．SPH 法による解は，SPH および改良 SPH（カーネル近似を重みの総和で除したもの）共に，粒子数が増加しても収束していない．図-3 に C-MultiMLS 法と SPH 法で得られたせん断ひずみの分布を示す（粒子数：105）．同図において，格子で描かれている曲面は厳密解を表し，点は各粒子におけるせん断ひずみ値を示している．SPH 法は領域全体において理論解と一致しておらず，精度の面で大きな問題を抱えていると言える．一方，C-MultiMLS による解は理論曲面と一致しており，精度良く近似されていることがわかる．

4.2 複雑な変位場における微分精度

C-MultiMLS 法の複雑な場に対する有効性を検証するために，次式で仮定される変位場を与え，せん断ひずみの分布を定性的に評価する．

$$\begin{aligned} u &= x^2 \sin(x+y) \\ v &= y^2 \cos(x+y) \end{aligned} \tag{10}$$

図-4 に C-MultiMLS 法で得られたせん断ひずみの分布を示す．同図より，C-MultiMLS 法の解は理論解とほぼ一致しており，複雑な変位場に対しても有効であることがわかる．

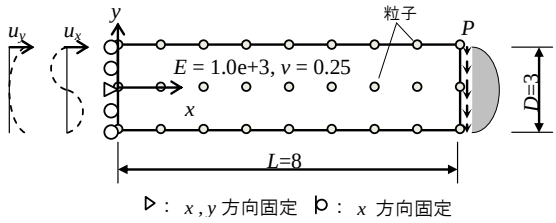
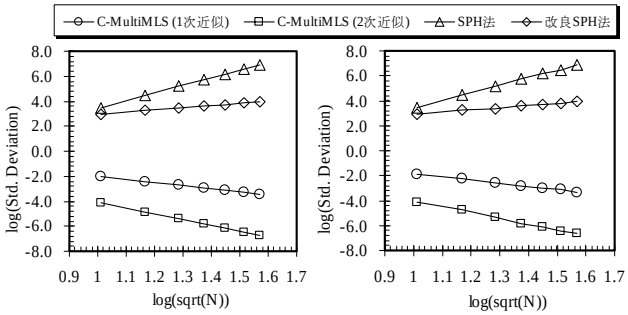
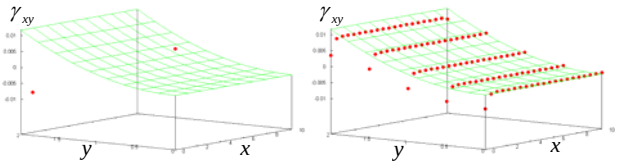


図-1 Timoshenko 梁モデル



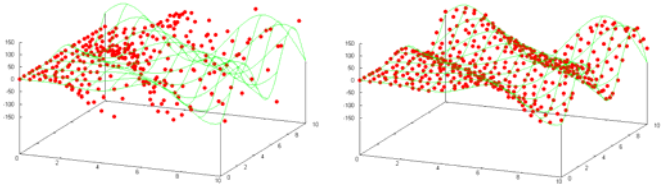
(a) 規則的な粒子配置　(b) 不規則的な粒子配置

図-2 C-MultiMLS，SPH および MPS 法によるエネルギー誤差ノルムの比較



(a) SPH 法　(b) C-MultiMLS 法

図-3 粒子におけるせん断ひずみの分布（SPH 法との比較）



(a) SPH 法　(b) C-MultiMLS 法

図-4 複雑な変位場におけるせん断ひずみの分布（SPH 法との比較）

5. おわりに

本研究では，物理自由度を定義することが可能な多次元型移動最小自乗法を提案した．SPH 法との比較解析の結果，本手法が極めて高い精度を有していることが分かった．

参考文献

- T. Belytschko et al, Comput. Methods Aappl. Mmech. Engrg., Vol. 139, pp. 3-47, 1996.
- 野口裕久，川島徹也，計算工学講演会論文集，Vol. 2, pp. 391-394, 1997.
- Gingold R.A. and Monaghan J.J, Mon. Not. R. astr. Soc., Vol. 181, pp. 375-389, 1977.