

トポロジー導関数を援用したVOF法に基づくトポロジー最適化法

新潟大学大学院自然科学研究科 学生員 橋本 大
 新潟大学工学部建設学科 正会員 阿部 和久
 新潟大学大学院自然科学研究科 正会員 紅露 一寛

1. はじめに

一定の制約下で、ある目的関数に対する最適な構造物を決定する手法として、構造最適化法がある。その中の1つの手法にトポロジー最適化手法が挙げられる。この手法では、孔の個数の変化を許容し最適な形状を求めることが可能である。当該最適化法は、既成概念に囚われずに最適形状を見出すことを可能とするため、詳細設計の前段階として、最適形状の探索に多用されている。

これまで、トポロジー最適化には密度法に基づいた様々な手法が提案されてきた。当該手法では、設計領域内の有限要素に密度関数 δ を与え、要素毎に δ を更新していく。この手法の導入により、トポロジー最適化問題を各要素密度の最適化問題に帰着して解くことが可能となる。しかし、中間密度やチェッカーボード状の材料分布が発生するといった問題を内在している。それを解決するため、当研究室ではVOF法による最適化手法¹⁾を構築してきた。しかし、VOF法にも、局所的な最適解に収束するという問題点があり、初期形状において十分に多くの孔を導入する必要がある。

なお、同様の問題は、level set法にも認められ、その解決策としてトポロジー導関数の導入²⁾が提案されている。本研究では、level set法での成果を参考に、VOF法へのトポロジー導関数の導入を試みる。

2. VOF法によるトポロジー最適化

(1) VOF関数

VOF関数 ψ は、設計領域 Ω 内の各有限要素における物質占有率として定義される。したがって、完全に物質で占められた要素で $\psi=1$ 、物質が存在しない要素で $\psi=0$ となる。トポロジー最適化問題においては、感度解析に基づき、以下の式によりVOF関数を移流させることで、最適な形状に近づけていく。

$$\mathbf{v} \cdot \nabla \psi + \frac{\partial \psi}{\partial t} = 0$$

ここで、 $\mathbf{v}$ は感度解析で得られた移流速度である。

(2) 最適化問題

本研究では、2次元静弾性問題を対象とし、以下の最適化問題を考える。

$$\begin{aligned} \min_{\psi} \tilde{J}(\mathbf{u}; \psi) &:= J(\mathbf{u}; \psi) + \lambda_+(V - V_{\max}) \\ \text{subject to } \lambda_+(V - V_{\max}) &= 0, \lambda_+ \geq 0 \\ a(\mathbf{u}, \tilde{\mathbf{u}}; \psi) &= \ell(\tilde{\mathbf{u}}; \psi), \mathbf{u} = \tilde{\mathbf{u}} \text{ on } \Gamma_u, \forall \tilde{\mathbf{u}} \in \mathbf{D} \end{aligned} \quad (2)$$

ここで、 J は目的汎関数であり、次式で与えられる。

$$J(\mathbf{u}; \psi) = \int_{\Omega} \psi F(\mathbf{u}) d\Omega \quad (3)$$

また、 $a(\mathbf{u}, \tilde{\mathbf{u}}; \psi), \ell(\tilde{\mathbf{u}}; \psi), V(\psi)$ は、次式で与えられる。

$$a(\mathbf{u}, \tilde{\mathbf{u}}; \psi) = \int_{\Omega} \psi \boldsymbol{\epsilon}(\tilde{\mathbf{u}}) : \mathbf{E} : \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}) d\Omega \quad (4)$$

$$\ell(\tilde{\mathbf{u}}; \psi) = \int_{\Omega} \psi \mathbf{f} \cdot \tilde{\mathbf{u}} d\Omega + \int_{\Gamma_{\sigma}} \mathbf{t} \cdot \tilde{\mathbf{u}} d\Gamma \quad (5)$$

$$V(\psi) = \int_{\Omega} \psi d\Omega \quad (6)$$

なお、 $\mathbf{u}$ は変位、 $\boldsymbol{\epsilon}$ はひずみ、 $\mathbf{E}$ は弾性テンソルである。

3. トポロジー導関数

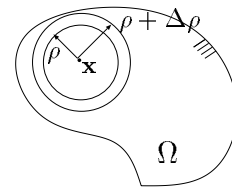


図1 トポロジー導関数の定義

トポロジー導関数は、図1に示すようにある点 $\mathbf{x}$ における半径 ρ の微小孔が成長する場合の感度として定義され、以下の式で与えられる³⁾。

$$\dot{J}(\mathbf{x}) = \lim_{\substack{\rho \rightarrow 0 \\ \Delta \rho \rightarrow 0}} \frac{J(\mathbf{u} + \Delta \mathbf{u}, \rho + \Delta \rho) - J(\mathbf{u}, \rho)}{2\pi \rho \Delta \rho} \quad (7)$$

ここで、 $\dot{J}$ は $\mathbf{x}$ におけるトポロジー導関数である。また、式(7)の分子の評価に際し、以下の随伴問題を導入する。

$$a(\tilde{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{u}}; \psi) = \int_{\Omega} \psi \frac{\partial F}{\partial \mathbf{u}} : \hat{\mathbf{u}} d\Omega, \hat{\mathbf{u}} \in \mathbf{D}, \forall \tilde{\mathbf{u}} \in \mathbf{D} \quad (8)$$

Key Words: トポロジー最適化法, VOF法, トポロジー導関数

連絡先: 950-2181 新潟市西区五十嵐二の町 8050 番地 TEL 025 (262) 7028 FAX 025 (262) 7021

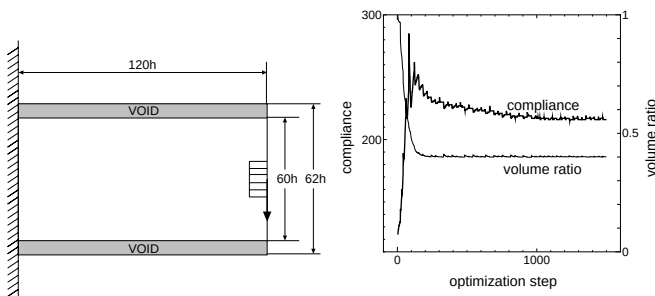


図2 初期形状

図3 目的関数と体積比の時刻歴

以上より、式(7)は、具体的に次式で評価可能となる。

$$j(\mathbf{x}) = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi\rho} \int_{\Gamma_\rho} [\epsilon(\hat{\mathbf{u}}) : \mathbf{E} : \epsilon(\mathbf{u}) - \mathbf{f} \cdot \hat{\mathbf{u}} - F(\mathbf{u})] d\Gamma \quad (9)$$

なお、VOF法の場合、求解方程式の特異性を避けるため、VOF関数を $\psi = \psi_{\min}$ と設定して空孔を与える。

4. 解析例

(1) コンプライアンス最小化問題

本研究では、コンプライアンス最小化問題を対象とする。このとき、 F は以下のように与えられる。

$$F(\mathbf{u}) = \epsilon(\mathbf{u}) : \mathbf{E} : \epsilon(\mathbf{u}) \quad (10)$$

また、コンプライアンス最小化問題を対象とした場合、 j は、具体的に以下の式で評価可能となる。

$$j(\mathbf{x}) = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi\rho} \int_{\Gamma_\rho} [\epsilon(\mathbf{u}) : \sigma(\mathbf{u})] d\Gamma \quad (11)$$

なお、 ϵ, σ は微小孔 ρ の孔境界 Γ_ρ 上におけるひずみと応力である。また、物体力 $\mathbf{f} = 0$ とした。

(2) 解析例

トポロジー導関数の等高線に沿って空孔境界を与える方法について検討した。

図2に示すアスペクト比 1:2 の片持ち梁(载荷点:右端中央)の場合を示す。解析条件において、要素長 h の有限要素分割の下、設計領域を $120h \times 62h$ の範囲にとり、図2の様に初期形状を与えた。なお、空孔の導入頻度を 20step 毎とし、空孔境界をトポロジー導関数の平均値の 30% の等高線で与える。また、体積の収束後は、空孔導入を行わない。

(3) 結果の検討

トポロジーの最適化過程におけるコンプライアンスと体積比の時刻歴を図3に、また、比較的初期の空孔導入時におけるトポロジー導関数の分布(左)と導入直後の形状(右)を図4に示す。空孔導入は 80step までに 4 回行われた。合

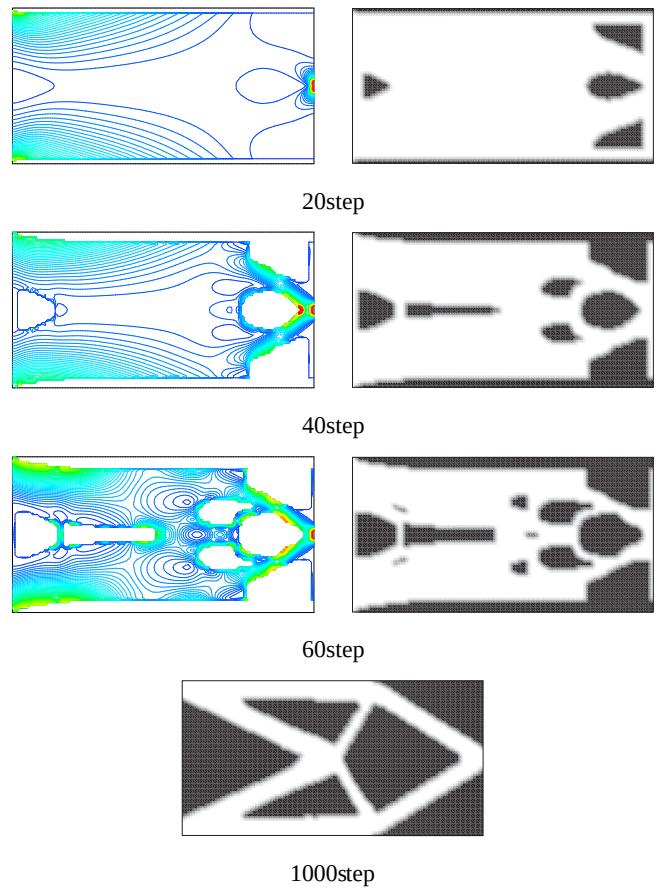


図4 トポロジー導関数の分布と形状変化

理的かつ対称に空孔が導入され、1000step 程度で安定して最終形状に収束していることが分かる。

当該解析において、空孔の導入間隔を 10~60step で変化させた結果、収束までの step 数は異なるものの、最適形状である図4の 8 部材トラスや 12 部材トラスに収束した。また、空孔境界のレベルをトポロジー導関数の平均値に対して過大、または過小な値に設定しない限り、空孔の導入頻度が多少異なっても、適切なトポロジーを安定に得ることが可能ながかった。

5. おわりに

トポロジー導関数の導入により、level set 法と同様に、初期段階での空孔の位置や数を設定することなく、最適なトポロジーを見出すことが可能となった。また、導入する空孔にトポロジー導関数の等高線分布を用いることで、効率良くかつ安定に最終形状を得られることが分かった。

参考文献

- 1) K.Abe, K.Koro: A topology optimization approach using VOF method, Struct Multidisc Optim, Vol.31, pp.470-479, 2006.
- 2) Seonho Cho, Seung-Hyun Ha, Min-Geun Kim: Level set Based on topological Shape Optimization of Structural Systems Using Topological Derivatives, Proceedings of Computational Engineering Conference, Vol.11, pp.851-854, 2006.
- 3) A.A.Novotny, R.A.Feijoo, E.Taroco, C.Padra: Topology sensitivity analysis, Comput.Methods Appl.Mech.Engrg, Vol.192, pp.803-829, 2003.