

バネ-ダッシュポット系を接触モデルとして用いるときの接線方向の減衰定数について

鳥取大学大学院 正 西村 強

1. はじめに

バネ-ダッシュポット系を接触モデルとして用いるときの接線方向の減衰定数の決定法について検討した. この接触モデルは, 不連続性岩盤や粒状体の解析に広く利用されている個別要素法 (P.A. Cundall, 1971) にも導入されている¹⁾. 物体が平面に接触しているとき, その接触点にバネ-ダッシュポットを接触法線方向および接線方向に配して (後出図-2 参照), ダッシュポットにより衝突に伴うエネルギー損失を表現している. このモデルを準静的な安定解析に適用するのであれば, 解析対象の生じた振動を速やかに静止に導くことを第一に, ダッシュポットの粘性係数の値に臨界粘性係数を用いることが有効となる. しかしながら, 落石のような速度を伴う現象を解析する際には, 粘性係数は衝突前後の速度を支配する重要な入力条件であり, 前述の準静的解析の例とは異なって, 慎重な検討が必要である.

2. 摩擦抵抗を有する平面への質点の入射・反射

図-1 に示すように, 粗い (摩擦抵抗を有する) 平面に質点が速度 v_i を有して入射角 α_1 で衝突し, 反射角 α_2 で反射する場合を考える. 衝突前の速度成分の変化は次のように書かれることが多い.

$$R_{en} = -\frac{v_{n,r}}{v_{n,i}} \quad R_{et} = \frac{v_{t,r}}{v_{t,i}} \quad (1)$$

運動量と力積の関係は, 質量を m , 衝突時の反力を f_n, f_t , 接触時間を t_c とすれば,

$$\begin{aligned} t \text{ 方向: } f_t t_c &= m(v_{t,r} - v_{t,i}) \\ n \text{ 方向: } f_n t_c &= -m(1 + R_{en})v_i \cos \alpha_1 \end{aligned} \quad (2)$$

今, 衝突時に摩擦則が成立すると仮定すれば, 静止摩擦係数を $\mu (= \tan \phi)$ とおいて,

$$\mu = \frac{f_t}{f_n} = \frac{f_t t_c}{f_n t_c} = \frac{m(v_{t,r} - v_{t,i})}{-m(1 + R_{en})v_i \cos \alpha_1} \quad (3)$$

$$\text{従って, } v_{t,r} = v_i(\sin \alpha_1 - \mu(1 + R_{en})\cos \alpha_1) \quad (4)$$

このとき, 接線方向の速度比 R_{et} は,

$$R_{et} = \frac{v_i(\sin \alpha_1 - \mu(1 + R_{en})\cos \alpha_1)}{v_i \sin \alpha_1} = 1 - \mu(1 + R_{en})\cot \alpha_1 \quad (5)$$

となり, $\tan \alpha_1 = \mu(1 + R_{en})$ を満たす α_1 では, $R_{et} = 0$ となり, $v_{t,r} = 0$, すなわち, 反射方向は平面法線方向に一致することがわかる. また, (5)式より $\tan \alpha_1 < \mu(1 + R_{en})$ なる α_1 では, $v_{t,r} < 0$ となり, 質点は法線方向に対して入射方向側へ跳ね返ることを以上の式は示しているが, 実現象では, 入射方向に反射することは考えにくく, この場合は, 摩擦角は完全に動員されず (つまり, 式(3)は成立せず, $f_t < \mu f_n$ となること), 質点は接線方向の運動量を損失する, 特に, 完全に損失する場合は $v_{t,r} = 0$ となると考えるべきであろう.

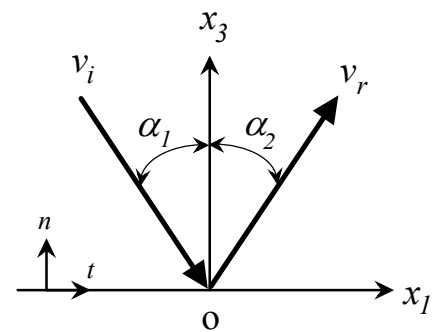


図-1 質点の入射と反射

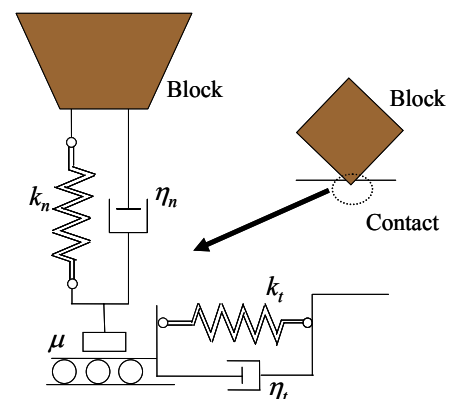


図-2 接触点のモデル化

キーワード: 反発係数, 接線方向速度比, ダッシュポット, 減衰定数. 連絡先: 680-8552 鳥取市湖山町南 4-101 鳥取大学工学部土木工学科, e-mail: tnishi@cv.tottori-u.ac.jp, tel/fax: 0857-31-6093/0857-28-7899.

3. 接線方向の減衰定数と速度比の関係

図-2 に、接触時に摩擦角が動員されないときのモデルとして冒頭に述べたバネ・ダッシュポット系を示す。質点の平面と衝突中の運動は、以下の運動方程式で表現できる。

$$m\ddot{x}_1 + \eta_t \dot{x}_1 + k_t x_1 = 0 \quad (6)$$

$$m\ddot{x}_3 + \eta_n \dot{x}_3 + k_n x_3 = 0 \quad (7)$$

式(7)に、 $t=0$ のとき $x_3=0$ 、 $\dot{x}_3=-v_{n,i}$ の条件を与えると、 n 方向の質点の軌跡および速度は以下ようになる。

$$x_3 = -e^{-\beta_n t} \frac{v_{n,i}}{\omega_{dn}} \sin \omega_{dn} t \quad (8)$$

$$\dot{x}_3 = -\left(\cos \omega_{dn} t - \frac{\beta_n}{\omega_{dn}} \sin \omega_{dn} t \right) v_{n,i} e^{-\beta_n t} \quad (9)$$

ここに、 $\omega_{dn} = \sqrt{\omega_{0n}^2 - \beta_n^2}$ 、 $\omega_{0n} = \sqrt{k_n/m}$ 、 $2\beta_n = \eta_n/m$ である。 T_{dn} を固有周期とすれば、 $t_c = \pi/\omega_{dn} = T_{dn}/2$ が接触時間を与える (図-3 参照)。 $t=t_c$ における速度を式(9)より求めて、 R_{en} は次式となる。

$$R_{en} = -\frac{v_{n,r}}{v_{n,i}} = \exp\left(-\frac{\beta_n \pi}{\omega_{dn}}\right) \quad (10)$$

この式は、大町と荒巻(1986)が求めている式と同様である²⁾。 $t=t_c$ の接線方向の速度は、式(6) に $t=0$ のとき $x_1=0$ 、 $\dot{x}_1=v_{t,i}$ の条件を与えて解いた後、 $t_c = T_{dn}/2$ として次式により求める。

$$\dot{x}_1 \Big|_{t=\frac{\pi}{\omega_{dn}}} = \left(\cos \frac{\omega_{dt}}{\omega_{dn}} \pi - \frac{\beta_t}{\omega_{dt}} \sin \frac{\omega_{dt}}{\omega_{dn}} \pi \right) v_{t,i} \exp\left(-\frac{\beta_t \pi}{\omega_{dn}}\right) \quad (11)$$

R_{et} は次式となる。

$$R_{et} = \frac{v_{t,r}}{v_{t,i}} = R_{en} \exp\left(\frac{\zeta_t}{\zeta_n} \sqrt{\frac{k_t}{k_n}}\right) \left(\cos \frac{\omega_{dt}}{\omega_{dn}} \pi - \frac{\beta_t}{\omega_{dt}} \sin \frac{\omega_{dt}}{\omega_{dn}} \pi \right) \quad (12)$$

R_{et} の符号について調べると、

$$\begin{aligned} (a) & 0 \leq \omega_{dt}/\omega_{dn} < 1/2 & \beta_t/\omega_{dt} > \tan((\omega_{dt}/\omega_{dn})\pi) \\ (b) & 1/2 \leq \omega_{dt}/\omega_{dn} < 1 & (R_{et} \leq 0) \\ (c) & 1 \leq \omega_{dt}/\omega_{dn} < 3/2 & \beta_t/\omega_{dt} < \tan((\omega_{dt}/\omega_{dn})\pi) \\ (d) & 3/2 \leq \omega_{dt}/\omega_{dn} < 2 & R_{et} > 0 \end{aligned} \quad (13)$$

となる。すなわち、減衰時の固有円振動数の比により整理でき、特に(b)の場合、 $R_{et} < 0$ となることがわかる。

4. バネ・ダッシュポット系を用いた入射・反射の解析例

図-4 に、 $v_i=10\text{m/s}$ 、 $\alpha_i=30^\circ$ として、接触点に図-2 の接触モデルを用いた場合を示す。解析条件は、固有円振動数に代わり、減衰定数を用いて表示し、かつ摩擦角が動員されないように $\phi=90^\circ$ とした。図-4 の上の図は(b)の条件に相当しており、接触後 0.033s で飛行に復すとき、 $v_{t,r} < 0$ となっている。一方、下図は、(c)の条件であり、 $v_{t,r} > 0$ であり、式(13)が有効であることを示す一例である。

参考文献 1) Cundall, P. A.: *Symposium on rock mechanics*, Nancy, Vol. 2, pp.129-136, 1971. 2) 大町達夫・荒井靖博: 構造工学論文集, Vol.32A, pp. 715-723, 土木学会, 1986.

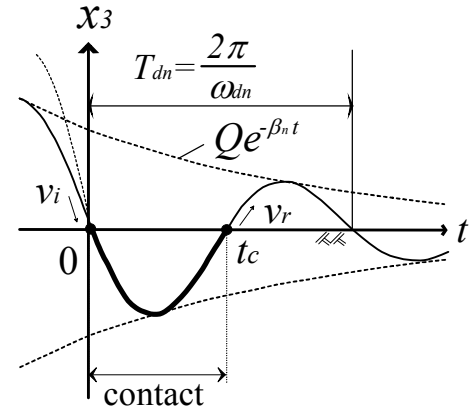
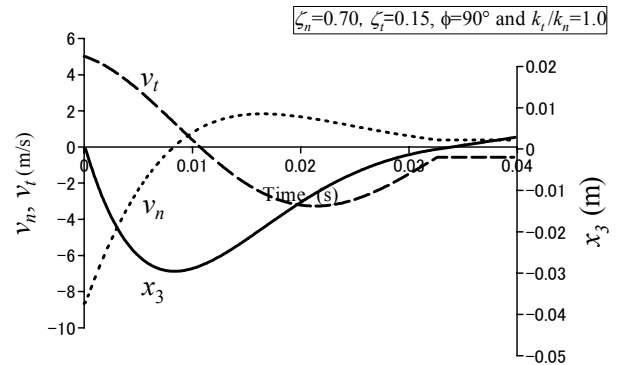
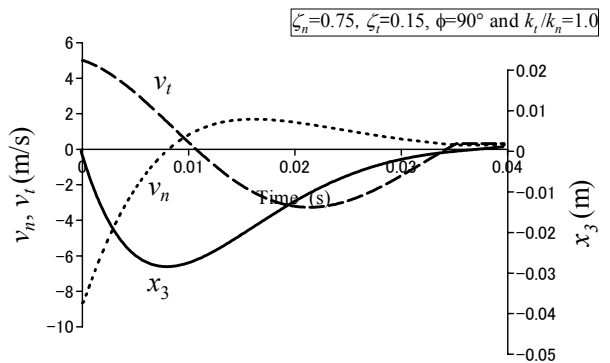


図-3 接触中の軌跡と接触時間



(i) $v_{t,r} < 0$ となる例



(ii) $v_{t,r} > 0$ となる例

図-4 接触中の軌跡と速度の変化