

時間・空間の離散化に wavelet 基底を用いた時間域境界要素法の2次元問題への適用

新潟大学大学院自然科学研究科 学生員 佐藤 鉄太郎
 新潟大学大学院自然科学研究科 正会員 紅露 一寛
 新潟大学工学部建設学科 正会員 阿部 和久

1. はじめに

Wavelet 法は、境界積分方程式の離散化に用いる基底関数に wavelet 基底を用いることで境界要素解析の高速化・効率化を図る手法である。基底関数のゼロモーメント性により、離散化の結果、得られる係数行列成分の大半が微小な成分となり、それらを切り捨てる(0とみなす)ことで係数行列を疎行列化し、計算効率の向上を図る。

Wavelet 法は、これまで適用の大半が Laplace 問題や Helmholtz 問題などの定常問題であり¹⁾、拡散問題を時間域境界要素法で解析するための wavelet 法の導入・実用化に関する研究は少数の成果が報告されるにとどまっている^{2), 3)}。いずれも wavelet を境界積分方程式にのみ離散化に適用し、時間方向の離散化は従来法で処理したものである。しかしながら、wavelet は境界値関数の近似等にも活用することができ⁴⁾、時間についての離散化と境界積分方程式の離散化の双方で wavelet 基底を用いる方法も構築でき、さらなるメモリ削減が期待できる。そこで、本研究では線形拡散問題を対象に、時間・空間の離散化に wavelet 基底を用いた時間域境界要素法を提案し、その定式化の妥当性について検討する。

2. 積分方程式の離散化

線形拡散問題における時間域境界積分方程式は、 $u(\mathbf{x}, 0) = 0$ を仮定して次式で与えられる。

$$\frac{1}{2}(\mathbf{y}, \tau) + \int_0^\tau \int_\Gamma k q^*(\mathbf{x}, t; \mathbf{y}, \tau) u(\mathbf{x}, t) d\Gamma_x dt - \int_0^\tau \int_\Gamma k u^*(\mathbf{x}, t; \mathbf{y}, \tau) q(\mathbf{x}, t) d\Gamma_x dt = 0 \quad (1)$$

ここで、 Γ は物体境界であり、 t, τ は時間変数である。また、 u はポテンシャル、 $q = \partial u / \partial n$ であり、 k は拡散係数である。 n は外向き法線方向を表し、 $u^*, q^* = \partial u^* / \partial n$ は基本解である。離散化にあたり、式(1)の u, q の時間変動を次式の wavelet 級数により近似する。次式において α, β, μ について和をとるものとして、

$$\begin{aligned} u(\mathbf{x}, t) &\approx \hat{u}^{(\alpha)}(\mathbf{x}) \phi^{(\alpha)}(t) + \tilde{u}^{(\mu, \beta)}(\mathbf{x}) \psi^{(\mu, \beta)}(t), \\ q(\mathbf{x}, t) &\approx \hat{q}^{(\alpha)}(\mathbf{x}) \phi^{(\alpha)}(t) + \tilde{q}^{(\mu, \beta)}(\mathbf{x}) \psi^{(\mu, \beta)}(t). \end{aligned} \quad (2)$$

なお、 $\phi^{(\alpha)}, \psi^{(\mu, \beta)}$ はそれぞれ時間近似に用いる scaling 関数、wavelet であり、 $\hat{u}^{(\alpha)}, \tilde{u}^{(\mu, \beta)}, \hat{q}^{(\alpha)}, \tilde{q}^{(\mu, \beta)}$ は展開係数である。

m は最高階層、 $n_s, n_w(\mu)$ はそれぞれ $\phi^{(\alpha)}, \psi^{(\mu, \beta)}$ の個数として定義する。さらに、式(2)の展開係数を、境界上で定義された wavelet 展開により次式で近似する。

$$\begin{aligned} \hat{u}^{(\alpha)}(\mathbf{x}) &\approx \hat{u}_j^{(\alpha)} \phi_j(\mathbf{x}) + \tilde{u}_{k,l}^{(\alpha)} \psi_{k,l}(\mathbf{x}), \\ \tilde{u}^{(\mu, \beta)}(\mathbf{x}) &\approx \tilde{u}_j^{(\mu, \beta)} \phi_j(\mathbf{x}) + \tilde{\tilde{u}}_{k,l}^{(\mu, \beta)} \psi_{k,l}(\mathbf{x}), \\ \hat{q}^{(\alpha)}(\mathbf{x}) &\approx \hat{q}_j^{(\alpha)} \phi_j(\mathbf{x}) + \tilde{q}_{k,l}^{(\alpha)} \psi_{k,l}(\mathbf{x}), \\ \tilde{q}^{(\mu, \beta)}(\mathbf{x}) &\approx \tilde{q}_j^{(\mu, \beta)} \phi_j(\mathbf{x}) + \tilde{\tilde{q}}_{k,l}^{(\mu, \beta)} \psi_{k,l}(\mathbf{x}), \end{aligned} \quad (3)$$

なお、上式は j, k, l で和をとるものとし、 $\phi_j, \psi_{k,l}$ はそれぞれ境界上の wavelet 展開に用いる scaling 関数、wavelet であり、 $\hat{u}_j^{(\alpha)}, \tilde{u}_j^{(\mu, \beta)}, \hat{q}_j^{(\alpha)}, \tilde{q}_j^{(\mu, \beta)}$ は展開係数である。 M は最高階層、 $N_s, N_w(k)$ をそれぞれ $\phi_j, \psi_{k,l}$ の個数として定義する。

ここで、式(2)、(3)を式(1)に代入することにより生じる残差を $r(\mathbf{y}, \tau)$ と定義し、離散化条件として次の Galerkin 条件を課す。 τ を解析によって時間変動を評価したい時間の上界として、

$$\int_0^\tau \int_\Gamma r(\mathbf{y}, \tau) w_i(\mathbf{y}, \tau) d\Gamma_y d\tau = 0 \quad (4)$$

ただし、 $(i = 1, \dots, N_b \cdot N_t)$ とし、 N_t は式(2)の自由度、 N_b は式(3)の自由度であり、重み関数 w_i は、時空の基底関数のテンソル積で定義する。その結果、 $N_b \cdot N_t$ 元の連立一次方程式を得る。

$$HU = GQ \quad (5)$$

ここで、 G, Q はそれぞれ基本解 u^*, q^* の境界・時間積分により得られた係数行列であり、 U, Q はそれぞれ u, q の展開係数を成分にもつベクトルである。これらのベクトルの成分を未知成分について解き、境界上および時間方向に wavelet 級数の再構成を行うと、境界上の u, q の時刻歴が得られる。

3. 解析結果

図1に示す例題を対象に、境界要素解析を行なった。拡散係数は $k = 1$ とし、積分方程式は Haar wavelet を用いて離散化した。Wavelet 展開は各部分境界において scaling 関数を1個配置し、最高階層を $M = 3$ としている。一方、時間に関しては、解析対象時間を $T = 0.32$ とし、この時間領域で1個の scaling 関数を配置し、最高階層を $m = 4$ とした。結果として全自由度は、 $N = N_b \cdot N_t = 2048$ である。

Key Words: 拡散問題, 時間域境界要素法, wavelet, 計算効率

連絡先: 950-2181 新潟市西区五十嵐二の町 8050 番地 TEL 025 (262) 7028 FAX 025 (262) 7021

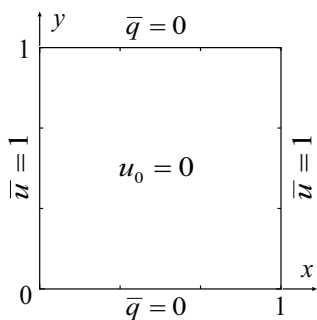
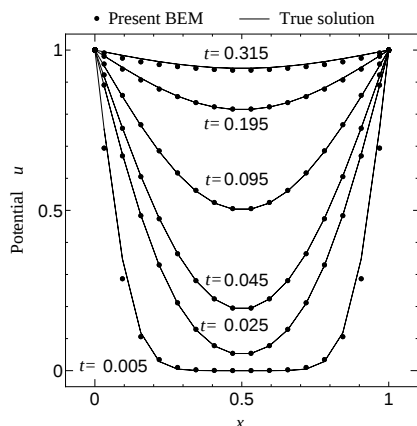


図1 初期条件と境界条件.

図2 $y = 0$ なる部分境界上での境界要素解 $\hat{u}$ の時刻歴.

なお、式 (6) の連立一次方程式は、対角スケーリング前処理付き GMRES 法で解くこととした。

図2より、本手法で得られた境界要素解は、境界および時間軸上で区間一定となる部分の中央点での解の近似を与えるものであることがわかる。境界要素解は解析解によく一致しており、本手法の定式化の妥当性が確認できる。次に、各解析時刻における近似解の誤差 $e(t)$ を図3に示す。なお、解析においては、切り捨て基準値を $\kappa = 1 \times 10^{-\delta}$ ($\delta = 3, 4, 5, 6, 7$) と設定し、誤差は次式で評価した。

$$e(t) := \sum_{i=1}^{N_b} |u(\mathbf{x}_i - u_{true}(\mathbf{x}_i, t))| \cdot \ell_i \quad (6)$$

ただし、 ℓ_i は境界要素解が一定値をとる境界上の小区間の長さであり、この小区間の中央点を $\mathbf{x}_i$ とする。

本手法により得られた境界要素解は時間領域にも Galerkin 法を適用していることもあり、解析対象とする時間領域内で誤差が平均化されたような誤差挙動を示している。また、切り捨て誤差が近似解の誤差を増大させないような切り捨て基準値が存在していることがわかる。

次に、係数行列の圧縮率（全成分数 N^2 に対する保存成分数の割合 (%) ）、および計算時間を表1に示す。当該の例題では、本手法を適用することにより、切り捨てを実行しない場合と同程度の誤差を持つ近似解が、1/3 程度の使用メモリで得られることがわかる。また、境界上の離散化にの

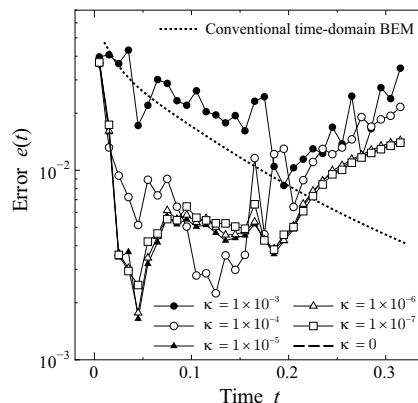
図3 各解析時刻における境界要素解の誤差 $e(t)$.

表1 係数行列の圧縮率 (%) と計算時間.

切り捨て基準値 κ	圧縮率 (%)	計算時間 (sec)
1×10^{-3}	4.292	1707.50
1×10^{-4}	10.899	2572.61
1×10^{-5}	21.711	4082.16
1×10^{-6}	36.565	5955.05
1×10^{-7}	50.936	7562.86
0	64.160	8431.75
従来法 (Galerkin BEM)	—	4.95
Wavelet BEM(空間のみ)	45.197	15.23

み wavelet を用いた時間域 BEM³⁾による解析結果（切り捨て基準値は最適値を採用）と比べると、使用メモリは1/2程度に削減可能であることがわかる。解の精度を保持するように切り捨てを実行した場合、事前切り捨て判定による計算量の削減効果が現われ、計算時間は切り捨てを実行しない場合の1/2程度で済んでいる。しかし、本手法では時間積分・境界積分ともに二重積分を処理していることもあり、総じて多くの計算時間を要している。

同一の例題を従来の時間域境界要素法で解いた場合、計算時間は4.95(sec)で済んでおり、本手法の約1/800となっている。また、境界上の離散化にのみ wavelet を用いた時間域 BEM の場合（15.23(sec)）と比べても、本手法の計算時間は著しく大きい。そのため、本手法の実用化に際しては、係数計算のさらなる効率化が必須である。

参考文献

- 1) Koro, K., Abe, K.: Non-orthogonal spline wavelets for boundary element analysis. *Eng. Anal. Bound. Elements*, Vol.25, pp149-164, 2001.
- 2) Ravník, J., Skerget, L., Hibersek, M.,: The wavelet transform for BEM computational fluid dynamics. *Engng. Anal. Bound. Elements*, Vol.28, pp.1303-1314, 2004.
- 3) 紅露 一寛, 五十嵐和希, 阿部和久: 拡散問題を対象とした時間域境界要素法における wavelet 基底の適用とその計算効率. 計算数理工学論文集, Vol.9, pp73-78, 2009.
- 4) Baramada, S.: Improving the performance of the boundary element method with time-dependent fundamental solutions by the use of a wavelet expansion in time domain. *Int. Number. Meth. Engrg.*, Vol.71, pp.363-378, 2007.