衝撃問題解析における陽解法と陰解法の精度検証

中央大学大学院　学生員　○ 関谷　香恵
中央大学大学院　学生員　中村　正人
中央大学　正会員　樫山　和男

1. はじめに

近年，地震や津波，台風などの自然災害により，構造物の破壊や倒壊が発生し，深刻な問題となっている．そのため，構造物の破壊現象を数値解析により評価することは，自然災害に対する防災・減災の観点から非常に重要であり，社会的な関心も高い．例えば，地震による衝撃力や土石流・津波・高潮などを受けた構造物が破壊するような現象はすべて動的問題であり，これらを数値解析により正確に再現するためには，動的な破壊現象が評価可能な数値解析手法が求められる．動的解析手法は，時間方法の離散化の違いにより，陽解法と陰解法とに大別することができる．

本報告では，構造物の破壊挙動が評価可能な数値解析手法を構築する準備段階として，衝撃問題における陽解法と陰解法の特徴・差異について，計算精度や計算時間の点から比較を行うものである．

2. 数値解析手法

(1) 基礎方程式

構造解析における動的問題に対する力のつり合い方程式，変位-ひずみ方程式，応力-ひずみ関係式をそれぞれ以下に示す．

$$\partial^T \boldsymbol{\sigma} - \rho \ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{b} = \mathbf{0} \tag{1}$$

$$\boldsymbol{\epsilon} = \boldsymbol{\partial} \mathbf{u} \tag{2}$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D} \boldsymbol{\epsilon} \tag{3}$$

ここに $\boldsymbol{\sigma}$ は応力，ρ は密度，$\mathbf{b}$ は物体力，$\boldsymbol{\epsilon}$ はひずみ，$\mathbf{u}$ は変位，$\mathbf{D}$ は弾性係数行列を表す．また，幾何学的境界条件と力学的境界条件は以下のように与える．

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} \qquad on \quad \Gamma_u \tag{4}$$

$$\mathbf{m}\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{t} = \bar{\mathbf{t}} \qquad on \quad \Gamma_t \tag{5}$$

Γ_u は変位が拘束されている領域，Γ_t は表面力が加わっている領域を表す．ここで，$\mathbf{m}$ は境界に対して外向き法線ベクトルを表す．次に，仮想仕事の原理式は微小仮想変位 u^*(重み関数) とすると以下の式に示される．

$$\int_\Omega (\boldsymbol{\partial} \mathbf{u}^*)^T \mathbf{D} (\boldsymbol{\partial} \mathbf{u}) dV + \int_\Omega \rho \ddot{\mathbf{u}} dV = \int_\Omega \mathbf{u}^{*T} \mathbf{b} dV + \int_{\Gamma_\sigma} \mathbf{u}^{*T} \bar{\mathbf{t}} dS \tag{6}$$

式 (6) に対して，空間方向の離散化を行うと有限要素方程式が導かれる．

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{F}_{int} = \mathbf{F}_{ext} \tag{7}$$

$\mathbf{M}$ は形状関数行列，$\mathbf{F}_{int}$ は内力項，$\mathbf{F}_{ext}$ 外力項を表す．なお，本論文では，減衰と物体力は考慮しない．

(2) 陽解法

陽解法では中心差分によって時間方向の離散化を行う．従って，加速度と速度，変位は以下のように求められる．

・ 加速度

$$\ddot{u}^n = \bar{\mathbf{M}}^{-1}(\mathbf{F}_{ext} - \mathbf{F}_{int}) \tag{8}$$

・ 速度

$$\dot{u}^{n+\frac{1}{2}} = \dot{u}^{n-\frac{1}{2}} - \ddot{u}^n \Delta t \tag{9}$$

・ 変位

$$u^{n+1} = u^n - \dot{u}^{n+\frac{1}{2}} \Delta t \tag{10}$$

また，$n = 0$ における速度ベクトル $\dot{u}^{0-\frac{1}{2}}$ は既知であるとしている．ここで，陽解法の安定条件はクーラン条件より，次式で与えられる．

$$\Delta t \leq \frac{h_{min}}{c} \tag{11}$$

ここで，Δt は微小時間増分量，c はクーラン数，h_{min} は解析対象の最小要素幅である．

(3) 陰解法

陰解法では $Newmark - \beta$ 法によって時間方向の離散化を行う．従って，加速度と速度は以下のように求められる．

・ 加速度

$$\ddot{u}^{n+\Delta t} = \frac{1}{\beta \Delta t^2}\left(u^{n+\Delta t} - u^n\right) - \frac{1}{\beta \Delta t}\dot{u}_n - \left(\frac{1}{2\beta} - 1\right)\ddot{u}_n \tag{12}$$

・ 速度

$$\dot{u}^{n+\Delta t} = \frac{\gamma}{\beta \Delta t}\left(u^{n+\Delta t} - u_t\right) + \left(1 - \frac{\gamma}{2\beta}\right)\dot{u}^n + \Delta t\left(1 - \frac{\gamma}{2\beta}\right)\ddot{u}^n \tag{13}$$

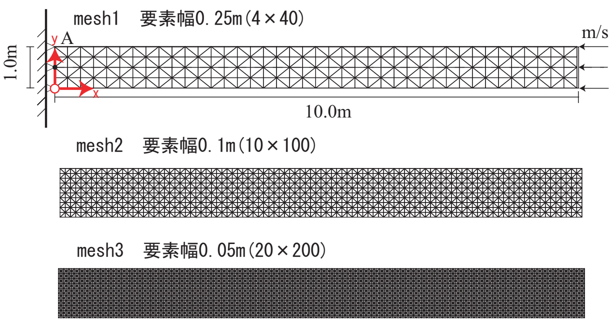
ここで，γ と β は積分精度と安定性が得られるように決めるパラメータである．本論文では $\gamma = \frac{1}{2}$ と $\beta = \frac{1}{4}$ を用いる．

3. 数値解析例

数値解例として 2 次元片持ち梁の衝撃問題を取り上げる．**図**-1 に解析モデルと，解析に用いる要素分割を示す．材料係数についてヤング率 E は $1.0 \times 10^10N/m^3$，ポアソン比は $\nu 0.3$，密度 ρ は $10000kg/m^2$ とする．片持ち梁の右側から速度を関数 $\dot{u}(t) = S\sin(\omega \frac{t}{tt})$ で与え応力波の伝播と計算時間を求め，陰解法と陽解法の解析結果の比較を行った．なお，t はステップ毎の時刻を表し，S は速度の最大値を表し $0.1m/sec$ とした．tt は 0sec から速度を与える時間を表し 0.001sec とし，0.001sec 以降の速度は 0m/sec とした．また，応力の伝播速度の理論式より 10^3m/s となる．

KeyWords：　有限要素法，陽解法，陰解法
連絡先：　〒112-8551 東京都文京区春日 1-13-27　TEL 03-3817-1815　Email sekitani-y@civil.chuo-u.ac.jp

従って，微小時間増分量の最大値は式 (11) より mesh1 は 2.5×10^{-4}sec，mesh2 は 10^{-4}sec，mesh3 は 5×10^{-5}sec となる．なお，mesh1 は速度関数の 1 波形に対して 4 分割，mesh2 は 10 分割，mesh3 は 20 分割である．



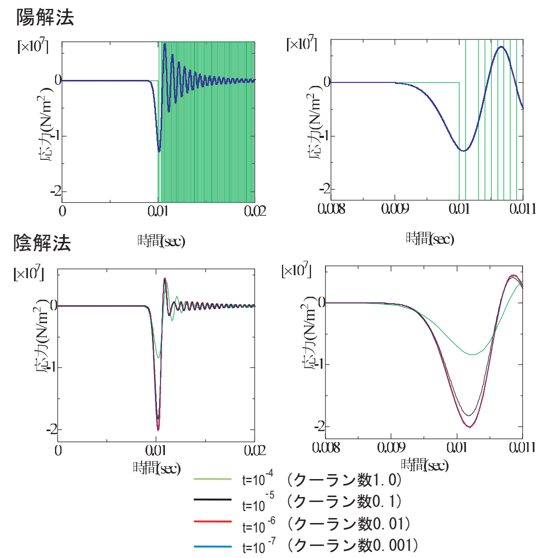
図－1 解析モデル

mesh2 を用いた場合の点 A における応力の時間変化を**図-2** に示す．陽解法では，$\Delta t = 10^{-4}$ は発散し，$\Delta t = 10^{-5}, 10^{-6}, 10^{-7}$ ともに差異は見られなかったが，陰解法に比べ数値振動が大きくみられた．次に，**図-3** は微小時間増分量を $\Delta t = 10^{-6}$ と固定した場合の要素分割の違いによる応力波の伝播の差異を示したものである．mesh1，mesh2 より mesh3 は陽解法と陰解法ともに数値振動が抑えられていることがわかる．つまり，応力波 1 波形に対して，20 分割以上必要といえる．**図-4** は要素分割を mesh2 と固定した場合の時間増分量 Δt の違いによる応力波の差異を示したものである．陽解法では $\Delta t = 10^{-4}$ は発散し，陰解法の方が大きい Δt で数値振動を抑えられた．応力波の到達時間に関しては陽解法・陰解法ともに差異はみられなかった．なお，計算時間の比較については講演時に述べるが，微小時間増分量を同じにした場合には，陽解法の方が計算時間が短いものとなった．ただし，陰解法の方が微小時間増分量を大きくとれるため陽解法が計算時間の点で必ずしも有利となるとはいえない．

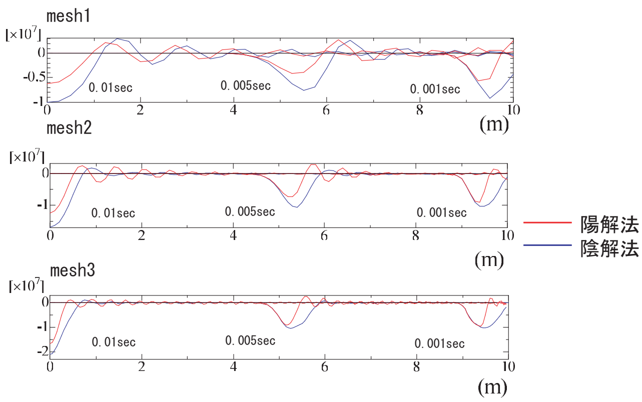
4. おわりに

本論文では，片持ち梁の動的衝撃問題解析を行い，陽解法と陰解法の精度検証を行った．

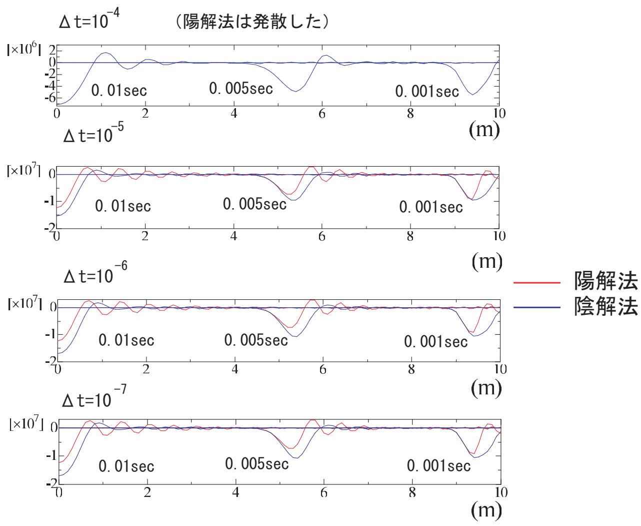
- 応力波の形状や伝播の様子は陰解法の方が陽解法に比べて数値振動を抑えることができた．
- 微小時間増分量に関して，陰解法は陽解法より大きい Δt で数値振動を抑えられた．
- 要素幅に関して，陽解法・陰解法ともに応力波の 1 波形に関して 20 分割以上必要である．
- 応力波の到達時間は，陽解法・陰解法ともに差異はみられなかった．



図－2 mesh2 の点 A の応力



図－3 $\Delta t = 10^{-6}$ の場合の応力波の伝播



図－4 mesh2 の応力波の伝播

参考文献

1) 加川　幸雄：有限要素法による振動・音響工学／基礎と応用　，株式会社　培風館　，1981 年
2) 土木学会：いまさら聞けない計算力学の常識　，丸善株式会社，2008 年