非圧縮性線形弾性体の Euler 型解法と計算の高速化に対する検討

日本学術振興会特別研究員 PD(京都大学大学院　社会基盤工学専攻)　学生員　○黒田　望
京都大学学術情報メディアセンター　正会員　牛島　省

１．はじめに

近年，固体の Euler 型解法の研究が盛んである．岡澤らをはじめとして，従来の Lagrange 的な解法では扱えない大変形問題を扱った研究 [1] や，超弾性体の構成則を用いた流体との連成計算 [2] などが行われている．固体の Euler 型解法は材料構成則が応力とひずみの関係で表される点が流体とは異なるが，それ以外は流体計算と同様の手法が使用できる．本研究では，非圧縮性流体の解法に基づく線形弾性体の Euler 型解法に対して，陰的解法を導入し，クーラン数と収束性の変化について考察する．

２．数値解析手法

本研究で扱われる非圧縮性線形弾性体の基礎式は，以下の非圧縮条件，Euler 表記による平衡方程式と偏差応力の時間発展式，密度関数 F の移流方程式である．

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0 \tag{1}$$

$$\rho\frac{\partial u_i}{\partial t} + \rho\frac{\partial}{\partial x_j}(u_i u_j) = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial T'_{ij}}{\partial x_j} + \rho g_i \tag{2}$$

$$\frac{\partial T'_{ij}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k}(u_k T'_{ij}) = 2GD_{ij} - L_{ki}T'_{kj} - T'_{ik}L_{kj} \tag{3}$$

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}(F u_i) = 0 \tag{4}$$

ここで，t と x_i は時間と 3 次元直交座標系の座標成分である．u_i は x_i 方向の流速成分で，密度 ρ, 圧力 p，偏差応力 T'_{ij}，せん断弾性係数 G は体積平均された値を用いる．L_{ij} と D_{ij} はそれぞれ速度勾配テンソルとひずみ速度テンソルである．F は固体の密度関数で，各領域に含まれる固体の体積含有率を表す．

上記の基礎式を Collocated 格子上で有限体積法によって解析する．はじめに偏差応力の時間発展式から偏差応力を求める．次に，速度の推定値を求め，圧力を計算し，速度を更新する．これらの手順は，非圧縮性流体の解法 [3] と同様である．さらに，Collocated 格子上において，高次精度のスキームの扱いが容易な C-ISMAC 法 [4] を用いて偏差応力と予測段階の速度に対して陰的解法を適用する．非圧縮性線形弾性体に対する陰的解法による定式化は，既報 [5] を参照とする．

３． 片持ち梁の振動問題への適用

図–1 に示すように，底面を固定した片持ち梁の下面を周期 ω で振動させ，下部の振動に追随して片持ち梁が変形する様子を再現する．境界に与える速度 U は $\bar{U}\sin(\omega t)$ とした．各変数の物性値は**表–1** に示すとおりである．固体と固体以外の領域は密度関数 F によって判別し，変形は密度関数の移流計算によって表している．固体以外の領域ではせん断弾性係数を 0 としているため，粘性のない流体中の固体の運動を解析していることになり，Lagrange 型解法による解析とは計算条件が異なっている．本計算では，時間間隔 Δt を $1.0\times10^{-4} \sim 8.0\times10^{-4}$ (sec), x 方向の格子数 N_x と y 方向の格子数 N_y をそれぞれ 80，150 とした．**図–1** に参考までに示した応力分布は $\bar{U} = 0.01$ のケースである．物体下部が x 軸の正方向に移動するにつれて，物体上部が負の方向に変形し，物体右側が引っ張りにより正の応力，物体左側が圧縮により負の応力が発生していることがわかる．

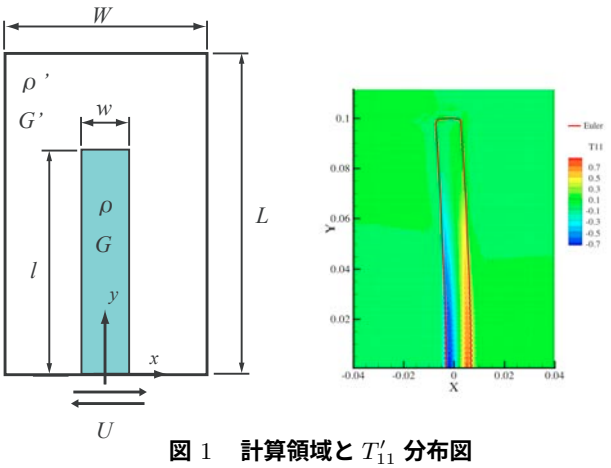


図 1　計算領域と T'_{11} 分布図

表–1　片持ち梁の振動: 物性値と幾何条件

ρ	Density of solid [kg/m^3]	1.0
G	Shear modulus of solid [Pa]	100.0
ρ'	Density [kg/m^3]	1.0
G'	Shear modulus [Pa]	0.0
L	Length [m]	0.15
W	Width [m]	0.08
l	Length of solid [m]	0.10
w	Width of solid [m]	0.01
ω	Angular frequency [rad/sec]	$10\pi/3$
$\bar{U}$	Amplitude [m/sec]	0.01, 0.04, 0.16

C-ISMAC 法では流速の推定値の計算が陰的に行われているため，陽的解法よりも 1 step の計算負荷が大きい．一方で，クーラン数による制限が緩くなるため，時間間隔を大きくしても安定して計算が行え，結果的に計算時間を短縮することができる．ただし，Δt を大きくす

キーワード 非圧縮性線形弾性体，Euler 型解法，陰的解法，高速化，収束性
連絡先　kuroda@civil.mbox.media.kyoto-u.ac.jp

ると，収束速度が低下し収束するまでの時間が長くなるため，Δt の増加に比例した計算時間の短縮化は見られない．**図–2** は C-ISMAC 法における計算時間を陽的解法の計算時間 T_0 によって正規化したものと，時間間隔 Δt の関係を示したものである．今回扱った振動問題では，どのケースにおいても時間間隔 Δt が 4×10^{-4} (sec) の時に計算時間は最小となり，計算時間を約 1/2 に短縮することができた．一方で，4×10^{-4} (sec) より大きい値を用いると，逆に計算時間が増加する結果となった．これは，前述したように，収束速度が低下したことが影響していると考えられる．ここで，収束速度の指標として，圧力計算における反復回数 P と速度の予測段階における反復回数 S を用いる．**図–3** に，時間間隔 Δt と反復回数の関係を示す．反復回数 P と S は，時間間隔 Δt が 1×10^{-4} (sec) のときの反復回数 P_0，S_0 によって正規化している．**図–3** は両対数グラフなので，グラフの傾きを n とすると，収束回数が Δt の n 乗に比例することがわかる．圧力計算の場合，グラフの傾き n_P は約 1.3 で，予測段階の場合，グラフの傾き n_S は約 1.9 である．これらのことから，Δt を a 倍にすることで全体の計算 step 数を $1/a$ に削減できるが，1 step 当たりの計算時間は $a^{1.3}$～$a^{1.9}$ 倍に増えるため，計算時間の短縮のためには，適切な Δt を設定する必要がある．また，n_P や n_S の値は，対象としている問題や連立方程式の解法によって異なると考えられるので，陰的解法を有効に活用するために n_P や n_S を小さくする必要がある．

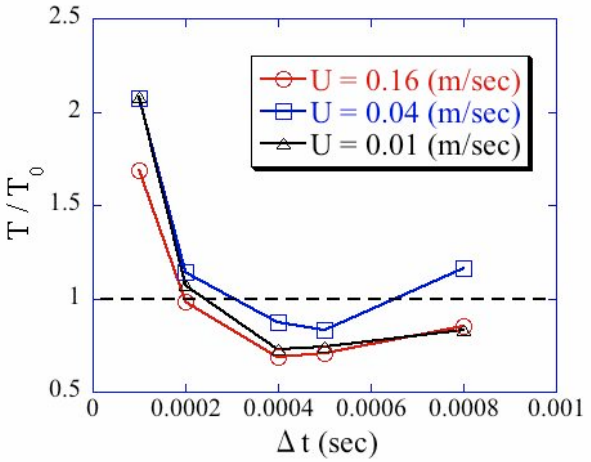
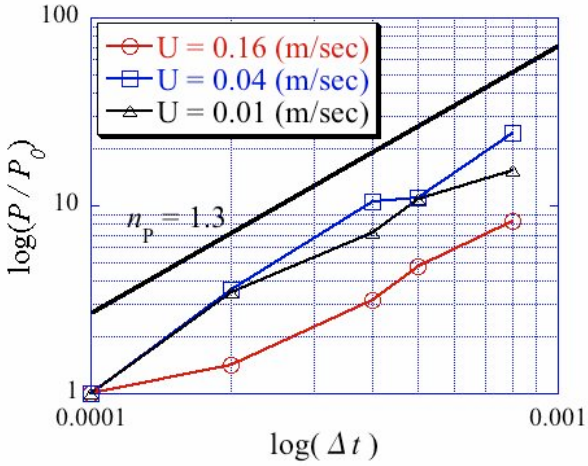


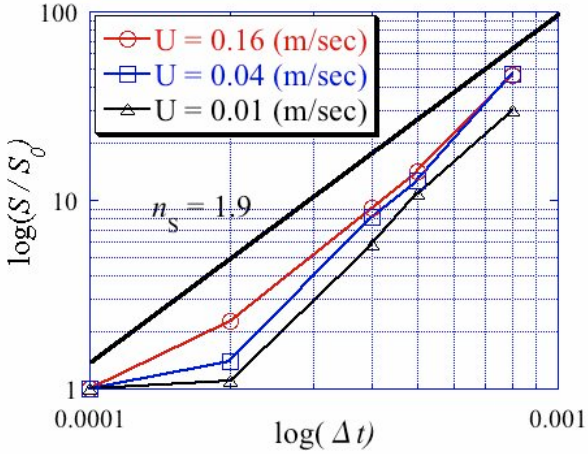
図 2　計算時間の比較

4．おわりに

本研究では，非圧縮性線形弾性体の Euler 型解法に対して，陰的解法を導入することでクーラン数による制限をなくし，時間間隔を大きく取ることで計算時間の短縮化を図った．その結果，今回対象として計算条件では，陽的解法に比べて 1/2 に短縮することができた．一方で，時間間隔を a 倍とすると収束速度は $a^n (n = 1.3 \sim 1.9)$ となり，収束するまでの時間が長くなるため，時間間隔の増加に比例した計算時間の短縮化は見られなかった．



(a) 圧力計算段階



(b) 速度の予測段階

図 3　反復回数と時間間隔の関係

参考文献

1) 岡澤重信, 車谷麻緒, 寺沢英之, 寺田賢二郎, 樫山和男. Euler 型有限被覆法による大変形固体解析に関する基礎的研究. 応用力学論文集, Vol. 12, pp. 195–203, 2009.

2) 杉山和靖, 伊井仁志, 竹内伸太郎, 高木周, 松本洋一郎. 現配置参照型流体構造連成オイラー解析法. 第 23 回数値流体力学シンポジウム, pp. D7–4, 2009.

3) S. Ushijima, M. Takemura, S. Yamada, and I. Nezu. Computational method for multiphase incompressible flows (MICS) and its applicability to particle-laden liquid flows. *Journals of JSCE*, No. 740/II-64, pp. 121–130, 2003.

4) S. Ushijima and I. Nezu. Higher-order implicit (C-ISMAC) method for incompressible flows with collocated grid system. *Journals of JSCE*, No. 719/II-61, pp. 21–30, 2002.

5) 投稿中. 応用力学論文集, 2010.