XFEM 近似の不完全性を解決するための再定式化の提案

京都大学大学院・日本学術振興会　学生員　○柴沼一樹，京都大学大学院　正会員　宇都宮智昭

1. はじめに

近年，FEM の枠組みの中で Partition of Unity (PU)により，対象とする問題の解の特性を直接的に利用する近似法として PUFEM[1)]が提案された．さらに，その典型的な適用例として，エンリッチメントと呼ばれる特異性あるいは不連続性を含む関数を局所的に節点へ付加する近似を用いた XFEM[2)]が提案された．この XFEM は，特にき裂解析への適用において多くの研究成果が報告されており，き裂の容易なモデル化やリメッシュ処理の回避など，その有用性が示されている．しかし，XFEM では構成する節点の一部のみにエンリッチ関数が付加された要素である Blending Elements (BE)が不可避的に存在し，その内部における近似精度の低下が指摘されている[3)].

本研究では，この BE の問題に起因した解析精度の低下を解決するために，XFEM の再定式化（PU-XFEM）の提案を行った．

2. 従来の XFEM 近似

従来の XFEM 近似$\mathbf{u}_{\mathrm{ap}}(\mathbf{x})$は，次式のように標準の有限要素近似$\mathbf{u}^{\mathrm{std}}(\mathbf{x})$にエンリッチメント$\mathbf{u}^{\mathrm{enr}}(\mathbf{x})$を局所的に節点単位で付加することで構成される．

$$\mathbf{u}_{\mathrm{ap}}(\mathbf{x}) = \mathbf{u}^{\mathrm{std}}(\mathbf{x}) + \mathbf{u}^{\mathrm{enr}}(\mathbf{x}) \quad \text{ただし，} \quad \mathbf{u}^{\mathrm{std}}(\mathbf{x}) = \textstyle\sum_{I\in N} \phi_I(\mathbf{x})\mathbf{u}_I \;, \quad \mathbf{u}^{\mathrm{std}}(\mathbf{x}) = \textstyle\sum_{I\in N^{\mathrm{enr}}} \phi_I(\mathbf{x})\Psi(\mathbf{x})\mathbf{a}_I \tag{1}$$

ここで，$\phi_I(\mathbf{x})$は標準の有限要素近似の内挿関数である．また，$\Psi(\mathbf{x})$はエンリッチ関数と呼ばれ，$\mathbf{u}_I$および$\mathbf{a}_I$は有限要素近似およびエンリッチメントに対応した節点自由度である．N^{enr}はエンリッチメントを付加する節点集合である．式(1)で定義される従来の XFEM の近似において，エンリッチメントは節点単位で付加される．このため，部分的にエンリッチメントが付加された要素である BE が不可避的に存在する．

BE の内部の近似法（**図-1** 参照）により，次式の 1 次元問題に対する内挿誤差Δの評価に示すように，標準の有限要素近似（収束次数 2）と比較して収束次数は少なくとも 1/2 低下する．

$$\|\Delta\|_{L_2(\Omega)} \le \left\{\int_{\Omega^{\mathrm{enr}}+\Omega^{\mathrm{blnd}}+\Omega^{\mathrm{std}}} |\Delta|^2 dx\right\}^{1/2} = C\sqrt{(M-1)h^p + h^3 + (N-M)h^5} \le \max\left\{Ch^{p/2}, Ch^{3/2}\right\} \tag{2}$$

3. PUFEM に基づく XFEM の再定式化

上記した BE の問題を解決するために，近似精度の保証を基礎とした PUFEM の XFEM への適用法を再検討することで，次式に示す XFEM の再定式化（PU-XFEM）を行った．

$$\mathbf{u}_{\mathrm{ap}}(\mathbf{x}) = \varphi_0(\mathbf{x})\mathbf{v}_0^{\mathrm{ap}}(\mathbf{x}) + \varphi_1(\mathbf{x})\mathbf{v}_1^{\mathrm{ap}}(\mathbf{x}) \quad \text{ただし，} \begin{cases} \mathbf{v}_0^{\mathrm{ap}}(\mathbf{x}) = \sum_{I\in N} \phi_I(\mathbf{x})\mathbf{u}_I \\ \mathbf{v}_1^{\mathrm{ap}}(\mathbf{x}) = \sum_{I\in N} \phi_I(\mathbf{x})\{\mathbf{w}_I + \Psi(\mathbf{x})\mathbf{a}_I\} \end{cases} , \quad \begin{cases} \varphi_0(\mathbf{x}) = 1 - \varphi_1(\mathbf{x}) \\ \varphi_1(\mathbf{x}) = \sum_{I\in N^{\mathrm{enr}}} \phi_I(\mathbf{x}) \end{cases} \tag{3}$$

ここで，$\varphi_0(\mathbf{x})$，$\mathbf{v}_0^{\mathrm{ap}}(\mathbf{x})$および$\varphi_1(\mathbf{x})$，$\mathbf{v}_1^{\mathrm{ap}}(\mathbf{x})$は，有限要素近似およびエンリッチメントに対応する PU，近似関数の組みである．

この PU-XFEM 近似$\mathbf{u}_{\mathrm{ap}}(\mathbf{x})$に関する BE 内部の近似法は，従来の XFEM 近似と大きく異なる形式となる（**図-2** 参照）．1 次元問題に対する内挿誤差Δの評価の結果，再定式化した PU-XFEM は，従来の XFEM に関して指摘された内挿誤差の収束次数の低下が生じず，次式のように適切な収束次数が得られることが示された．

$$\|\Delta\|_{L_2(\Omega)} \le \sqrt{2}C'\{(Ch^2)^2 + (Ch^q)^2\}^{1/2} \le Ch^2 \tag{4}$$

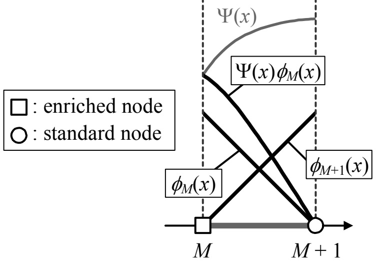

図-1　BE における従来の XFEM 近似

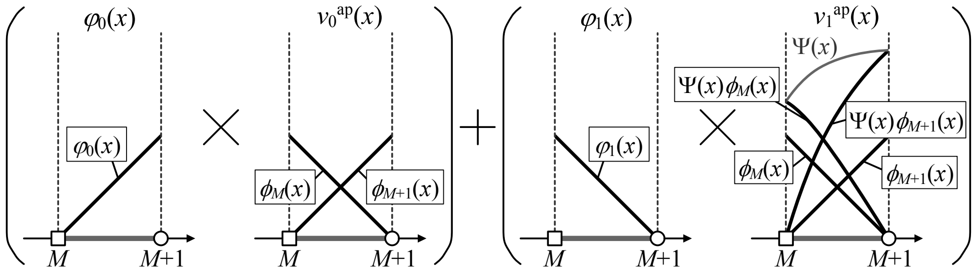

図-2　BE における PU-XFEM 近似

キーワード　拡張有限要素法, XFEM, PUFEM, partition of unity, blending elements, crack analysis
連絡先　〒615-8540　京都市西京区京都大学桂　TEL 075-383-3164　FAX 075-383-3163

4. き裂解析のモデル化

PU-XFEM による 2 次元線形破壊力学問題への適用では，従来の XFEM と同様エンリッチ関数として，き裂面の変位不連続性を再現するためのヘビサイド基底$H(\mathbf{x})$とき裂先端近傍特異場を再現するための変位の漸近解基底$\gamma_k(\mathbf{x})$ $(k=1,\dots 4)$を用いる．なお，$H(\mathbf{x})$は BE において定数関数であり BE の問題が生じないため，例外的に従来の XFEM と同様の定義を用いる．PU-XFEM によるき裂解析の変位場の近似$\mathbf{u}_{\mathrm{ap}}(\mathbf{x})$を次式で定義する．

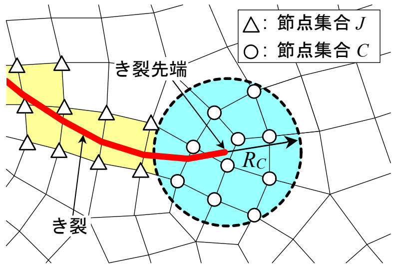

図-3　き裂解析における節点集合

$$\mathbf{u}_{\mathrm{ap}}(\mathbf{x}) = \varphi_0(\mathbf{x})\mathbf{v}_0^{\mathrm{ap}}(\mathbf{x}) + \varphi_C(\mathbf{x})\mathbf{v}_C^{\mathrm{ap}}(\mathbf{x}) \quad \text{ただし,} \begin{cases} \mathbf{v}_0^{\mathrm{ap}}(\mathbf{x}) = \sum_{I\in N}\phi_I(\mathbf{x})\mathbf{u}_I + \sum_{I\in J}\phi_I(\mathbf{x})H(\mathbf{x})\mathbf{b}_I \\ \mathbf{v}_C^{\mathrm{ap}}(\mathbf{x}) = \sum_{I\in N}\phi_I(\mathbf{x})\{\mathbf{w}_I + \sum_{k=1}^{4}\gamma_k(\mathbf{x})\mathbf{c}_I^k\} \end{cases}, \begin{cases} \varphi_0(\mathbf{x}) = 1-\varphi_1(\mathbf{x}) \\ \varphi_C(\mathbf{x}) = \sum_{I\in C}\phi_I(\mathbf{x}) \end{cases} \quad (5)$$

ここで，$\mathbf{b}_I$および$\mathbf{c}_I^k$ $(k=1,\dots 4)$は，それぞれエンリッチ関数$H(\mathbf{x})$および$\gamma_k(\mathbf{x})$ $(k=1,\dots 4)$に対応した節点自由度である．また，JおよびCは，図-3 に示すような節点集合である．

5. 数値解析検証

以下に示す基本的な解析モデルを用いて，本研究で再定式化した PU-XFEM の有効性に関する検証を行った．

5.1 無限板モデル　図-4 に示す無限板モデルを用いて基本的な解析精度の検証を行った．まず，変位場に関する L_2 誤差ノルムの収束性（図-5）の評価の結果，PU-XFEM を用いた場合，従来の XFEM と比較して解析精度の大きな改善が示された．また，き裂先端近傍応力場の再現性（図-6）の評価の結果，PU-XFEM を用いた場合，エンリッチメントが付加される領域において従来の XFEM のような誤差は発生せず，き裂先端近傍の漸近解を正確に再現可能であることが示された．

5.2 有限板モデル　図-7 に示す有限板モデルを用いた破壊力学パラメータの解析精度の検証を行った．J 積分の領域積分法により算出した応力拡大係数 K_{I} の収束性（図-8）の評価の結果，PU-XFEM を用いた場合，従来の方法よりも要素分割による解析精度の安定性が大きく向上し，広い範囲で高精度に破壊力学パラメータを算出可能であることが示された．このため，実用性の観点からもその有効性が示された．

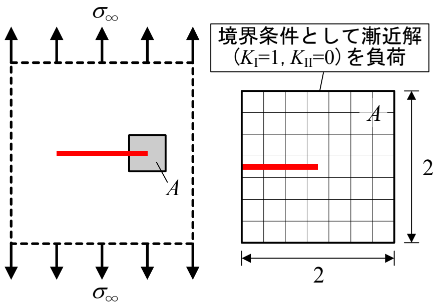

図-4　無限板モデル

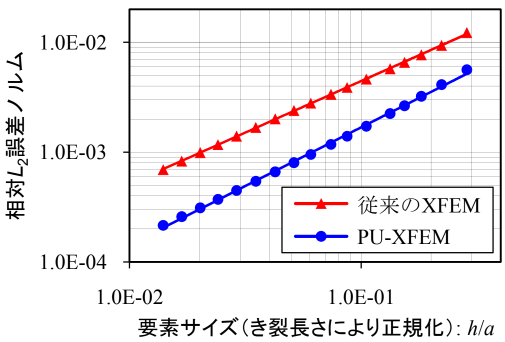

図-5　L_2 誤差ノルムの収束性

6. 結論

従来の XFEM における BE の問題を解決するために，解析領域全体の近似精度を保証する PUFEM 近似の XFEM への適用法に再検討を加えることで XFEM の再定式化（PU-XFEM）を行った．1 次元問題を対象とした誤差解析の結果，従来の XFEM における BE の問題の本質的な解決が示唆された．また，PU-XFEM を 2 次元の線形破壊力学問題に適用し，基本的な数値解析モデルを用いて，数値解析の精度に関して従来の XFEM との比較を行った．その結果，本研究で再定式化した PU-XFEM は，エンリッチメントに組み込まれた既知である解の特性をより正確に再現でき，このため従来の XFEM と比較していずれの評価においても高い解析精度を示した．

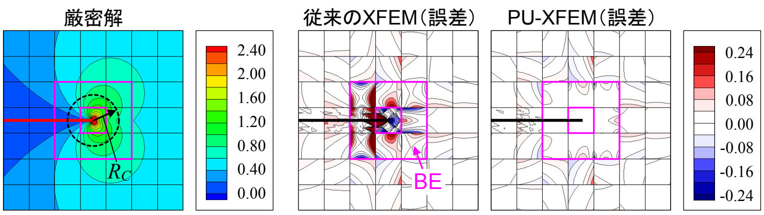

図-6　最大主応力の再現性（要素分割 7 × 7）

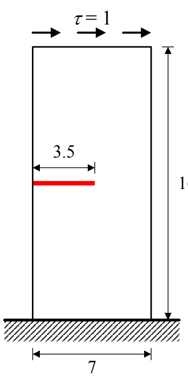

図-7　有限板モデル

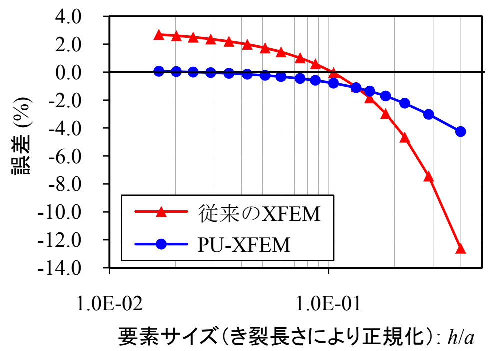

図-8　応力拡大係数 K_{I} の収束性

1) Melenk, J. M. and Babuska, I., *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.*, Vol. 39, 1996, pp.289-314.
2) Belytschko, T. and Black, T., *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, Vol. 45, 1999, pp.602-620.
3) Chessa, J., *et al.*, *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, Vol.57, 2003, pp.1015-1038.