拡張有限要素法を用いた浸透流解析システムにおける薄い構造の交差問題

清水建設技術研究所　正　○山田俊子・正　櫻井英行
上智大学　長嶋利夫

１．はじめに

地下水流動場において，透水性が周辺地山と極端に異なる断層破砕帯等の構造は，地下水挙動に大きな影響を及ぼすため，水理地質構造上重要な要素の一つである．しかし，断層破砕帯等の薄い構造は，有限要素法（FEM）による地下水浸透流解析において，解析領域のメッシュ分割作業を困難にする存在であり，平均化手法等によるモデル化が多く用いられてきた．これに対し，筆者らは物性境界を解析メッシュとは独立に定義することが可能な拡張有限要素法（X-FEM：eXtended Finite Element Methods）[1)]を用いた浸透流解析システムの開発に着手し，これまでの検討でメッシュ分割の大幅な効率化と解析精度維持の両立を確認し，薄い構造が交差する厳しい条件の問題についてもX-FEMを適用できることの見通しを得た[2)]．本論文では，薄い構造の交差問題について，境界面同士の交点における連続性を考慮することによる解析精度の向上を試みる．

２．X-FEM

スカラーポテンシャル$\phi(\mathbf{x})$における X-FEM の近似の一般形は次のよう書ける．

$$\phi^h(\mathbf{x}) = \sum_{I\in\mathbf{N}} \phi_I L_I(\mathbf{x}) + \sum_K \sum_{I\in\mathbf{M}^{(K)}} L_I(\mathbf{x}) a_I^{(K)} f^{(K)}(\mathbf{x}) \tag{1}$$

ここに，$L_I(\mathbf{x})$は，一般的な FEM の節点Iに関する形状関数，$\mathbf{N}$は全節点の集合である．$f^{(K)}(\mathbf{x})$は部分的に導入されるエンリッチ関数であり，$\mathbf{M}^{(K)}$はエンリッチされる節点の集合，Kはエンリッチ関数の数である．ϕ_Iとa_Iは未定定数である．エンリッチ関数$f^{(K)}(\mathbf{x})$として微分不連続関数[2)]を導入することにより，メッシュ分割とは独立に材料境界面を考慮することが可能となる．ここで，材料境界面が交差する場合には，交点における連続性に対応する関数を付加する必要がある[3)]．式(2)は，二つの材料境界面が交差する場合であり，右辺第4項が付加関数である．

$$\begin{aligned}\phi^h(\mathbf{x}) &= \sum_{i\in\mathbf{N}} \phi_i L_i(\mathbf{x}) \\ &+ \sum_{i\in\mathbf{M}^{(1)}} L_i(\mathbf{x}) a_i^{(1)} \eta^{(1)}(\mathbf{x}) + \sum_{i\in\mathbf{M}^{(2)}} L_i(\mathbf{x}) a_i^{(2)} \eta^{(2)}(\mathbf{x}) \\ &+ \sum_{i\in\mathbf{M}^{(1)}\cap\mathbf{M}^{(2)}} L_i(\mathbf{x}) a_i^{(1,2)} \eta^{(1)}(\mathbf{x}) \eta^{(2)}(\mathbf{x})\end{aligned} \tag{2}$$

３．ベンチマークテスト

式(3)から式(5)の微分方程式で記述される三次元定常飽和浸透流問題を対象とし，数値実験を行った．

$$\nabla(k\nabla\phi(\mathbf{x})) = 0 \qquad \text{in } V \tag{3}$$

$$\phi(\mathbf{x}) = \hat{\phi} \qquad \text{on } S_\phi \tag{4}$$

$$k\partial\phi(\mathbf{x})/\partial n = \hat{q} \qquad \text{on } S_n \tag{5}$$

ここで，$\phi(\mathbf{x})$は未知の速度ポテンシャル，kは透水係数，∇は線形微分演算子，qはフラックス，^は既知量，Vは解析領域，S_ϕとS_nは境界条件が与えられる境界面を表す．解析モデルを**図1**に示す．境界条件はモデルの上面で式(6)，その他の面では式(5)によりフラックスをゼロとした．

$$\phi_I = \hat{x} \quad \text{with} \quad a_I^{(K)} = 0 \qquad \text{on z=6m} \tag{6}$$

図2に薄い層の4種の交差パターンを示す．これらのモデルについて，鉛直方向に分布する薄い層の透水係数k_vおよび水平方向に分布する薄い層の透水係数k_hが周辺の透水係数k_0と比較して難透水の場合（$0.01k_0$），高透水の場合（$100k_0$）および混在する場合についてケーススタディを実施した．**表1**に解析ケースを示す．X-FEMについては，物性境界面の交点の連続性を考慮する場合としない場合，すなわち式(2)において第4項を考慮した場合としない場合について解析を実施した．また，比較のため，薄い層をFEMでメッシュ分割したモデルと，解析領域全体を0.1mの細かい要素サイズで分割したモデルによる解析を実施し，0.1mメッシュの参照解を正解として誤差比較を行った．

図３はCASE1-LLの水平方向薄層の上面および下面におけるϕの x 方向分布である．×で示す物性境界面交点の連続性を考慮したX-FEMの解析結果は，△で示す連続性を考慮しない X-FEM の解析結果よりも，薄層下面の交点において参照解に近いことが確認できる．

図 4 は全解析ケースの解析精度の比較である．解析精度は，式(7)による相対誤差E_ϕを指標とした．図より，X-FEM において物性境界面の交点の連続性を考慮しても，解析精度が大きく改善されないことが分かる．

$$E_\phi = \sqrt{\sum_{i\in\mathbf{N}} (\phi_i^{\text{Reference}} - \phi_i)^2} \Big/ \sqrt{\sum_{i\in\mathbf{N}} (\phi_i^{\text{Reference}})^2} \tag{7}$$

４．おわりに

X-FEM により薄い構造の交差をモデル化する場合に，近似式において交点の連続性を考慮しても顕著な解の改善は見出せなかった．交点の連続性を考慮した場合には，節点自由度が増加するだけでなく，マトリクスの性質も悪化するため，大規模問題では式(2)の右辺第 4 項を無視する戦略も考えられる．ただし，今回の数値実験は，理想的な立方体要素を用い，薄い構造が直角に交わる場合を対象とした限られた解析条件での一例に過ぎない．要素形状の歪みや薄い構造が交差する角度が解に与える影響等についても数値実験を重ねて確認する必要がある．

キーワード：拡張有限要素法，浸透流解析，断層，材料不連続
連絡先：〒135-8530 東京都江東区越中島 3-4-17 清水建設（株）技術研究所　社会基盤技術センター　TEL(03)3820-8779

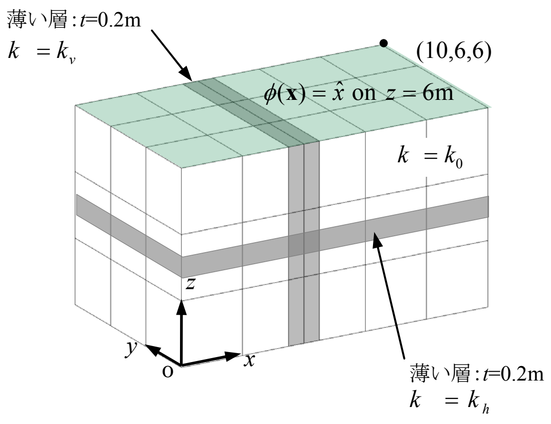


図 1 ベンチマーク問題

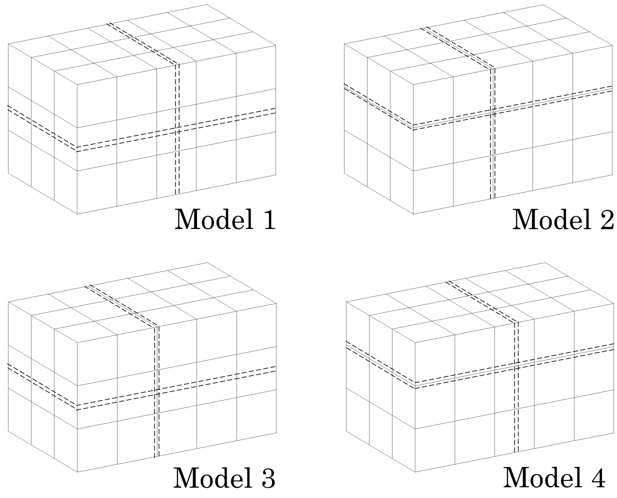


図 2 薄い層の交差位置が違う 4 種の解析モデル

表 1 解析ケース

CASE	Model	k_v, k_h
case1-LL	Model 1	k_v=0.01k_0 k_h=0.01k_0
case2-LL	Model 2	
case3-LL	Model 3	
case4-LL	Model 4	
case1-HH	Model 1	k_v=100k_0 k_h=100k_0
case2-HH	Model 2	
case3-HH	Model 3	
case4-HH	Model 4	
case1-LH	Model 1	k_v=0.01k_0 k_h=100k_0
case2-LH	Model 2	
case1-HL	Model 1	k_v=100k_0 k_h=0.01k_0
case2-HL	Model 2	

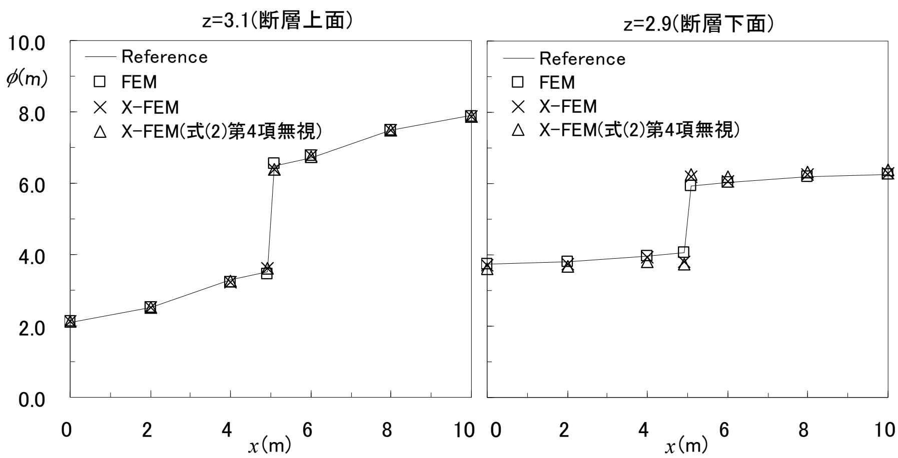
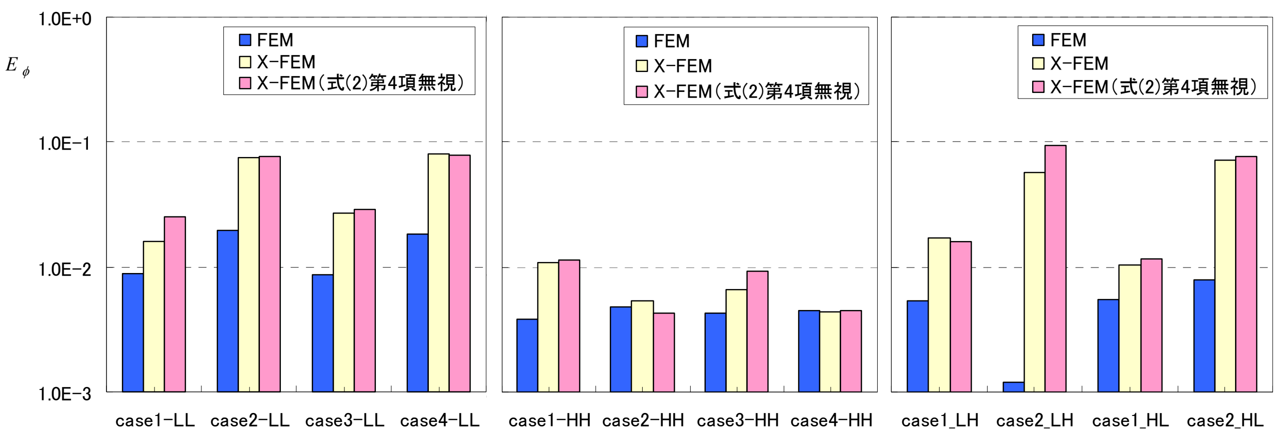


図 3 解析結果（case1-LL：Model 1, k_v=k_h=0.01k_0〔薄層難透水〕）



(a) 二つとも難透水の薄層　(b) 二つとも高透水の薄層　(c) 難透水・高透水の薄層が混在

図 4 解析精度の比較

参考文献

1)N. Moës et al.: A finite element method for crack growth without remeshing, *Int. J. Numer. Methods. Engrg*. Vol.46, pp.131-150, 1999.

2)櫻井英行ほか：X-FEMによる薄い内在構造のモデル化，日本機械学会第22回計算力学講演会論文集, pp.366-367, 2009.

3)Belytschko et al., : Arbitrary discontinuities in finite elements, *Int. J. Numer. Meth. Engrg.*, Vol.50, pp.993-1013, 2001.