非直交 wavelet を用いた時間域境界要素法による 2 次元スカラー波動伝播解析の効率化

新潟大学大学院自然科学研究科　学生員　菅波 祐太
新潟大学大学院自然科学研究科　正会員　紅露 一寛
新潟大学工学部建設学科　正会員　阿部 和久

1. はじめに

境界要素解析を高速化・効率化する手法の一つとして，wavelet 法[1)]が提案されている． この方法は，境界値の近似等の離散化に wavelet 基底を用いる方法で，離散化により得られた係数行列成分の大半は微小な成分となる．大半の微小な係数成分は解の精度に影響しない範囲内で切り捨てることができるため，使用メモリの削減と疎行列用の反復解法を適用することによる計算時間の削減が可能となる．

これまで，wavelet 法の適用による境界要素解析の効率化は専ら Laplace 問題を対象としており，特に非定常波動問題における時間域境界積分方程式の離散化に適用した研究は著者ら[2)]により示されているほかない．ただし，これまでは Haar wavelet の適用に限定されており，基底関数のゼロモーメント次数の高次化の有効性については検討されていない．

そこで本研究では，wavelet 基底のゼロモーメント次数を自由に選定可能である非直交スプライン wavelet[1)]を用いた時間域境界要素法による波動伝播解析を行い， wavelet 法の計算効率の向上効果について検討する．

2. 時間域境界要素法における wavelet 法の適用

本研究では，次の 2 次元スカラー波動問題を対象とする．

$$\begin{aligned}&\Delta u(\boldsymbol{x},t)-\frac{1}{c^2}\ddot{u}(\boldsymbol{x},t)=0,\ (\text{in }\Omega)\\&u=\bar{u},\ (\text{on }\Gamma_u)\quad p=\frac{\partial u}{\partial n}=\bar{q},\ (\text{on }\Gamma_q)\\&u(\boldsymbol{x},0)=u_0(\boldsymbol{x}),\ \dot{u}(\boldsymbol{x},0)=v_0(\boldsymbol{x}),\ (\text{in }\Omega)\end{aligned}\tag{1}$$

ここで，u は波動ポテンシャル，c は波動の伝播速度であり，Δ は Laplacian である．また，Ω は領域であり，Γ は境界とする．Γ は部分境界 Γ_u,Γ_q からなり，$\Gamma_u\cup\Gamma_q=\Gamma$, $\Gamma_u\cap\Gamma_q=\emptyset$ であるものとする．

式 (1) に対応する時間域境界積分方程式は，Brebbia ＆ Mansur の正則化[2)]を導入し，$u_0=0, v_0=0$ を仮定した上で次式で与えられる．

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}u(\boldsymbol{y},\tau)-\int_0^\tau\int_\Gamma u^*(\boldsymbol{x},t;\boldsymbol{y},\tau)q(\boldsymbol{x},t)d\Gamma_x dt\\&\quad-\int_0^\tau\int_\Gamma q_1^*(\boldsymbol{x},t;\boldsymbol{y},\tau)u(\boldsymbol{x},t)d\Gamma_x dt\\&\quad-\int_0^\tau\int_\Gamma q_2^*(\boldsymbol{x},t;\boldsymbol{y},\tau)\dot{u}(\boldsymbol{x},t)d\Gamma_x dt=0\end{aligned}\tag{2}$$

ここで，u^* は式 (1) に対応する基本解であり，q_1^* は次式で与える．

$$q_1^*=\frac{r}{2\pi c^2}\frac{\partial r}{\partial n}\frac{H(c(\tau-t)-r)}{(\tau-t)^2\sqrt{(\tau-t)^2-(r/c)^2}},\tag{3}$$

なお，$H(\cdot)$ は Heaviside 関数，$r=|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}|$，$n$ は境界上での外向き法線方向であり，$q_2^*=(\tau-t)q_1^*$ で与える．

式 (2) の時間についての離散化は，各時間ステップ間で u に線形近似，q に後退方向区間一定近似，$\dot{u}$ に後退差分近似を導入した上で，選点法を適用する．一方，境界積分方程式の離散化は，境界値関数を wavelet 展開で近似した上で，近似基底を用いた Galerkin 法により行う．時刻 $t_p=p\Delta t$ における境界値関数 $u^{(p)}(\boldsymbol{x}),q^{(p)}(\boldsymbol{x})$ の wavelet 展開は次式で与えられる．

$$\begin{aligned}u^{(p)}(\boldsymbol{x})&\approx\sum_{j=1}^{n_s}\hat{u}_{0,j}\phi_{0,j}(\boldsymbol{x})+\sum_{k=0}^{m}\sum_{l=1}^{n_w(k)}\tilde{u}_{k,l}\psi_{k,l}(\boldsymbol{x}),\\q^{(p)}(\boldsymbol{x})&\approx\sum_{j=1}^{n_s}\hat{q}_{0,j}\phi_{0,j}(\boldsymbol{x})+\sum_{k=0}^{m}\sum_{l=1}^{n_w(k)}\tilde{q}_{k,l}\psi_{k,l}(\boldsymbol{x}),\end{aligned}\tag{4}$$

ここで，$\phi_{0,j}(\boldsymbol{x})$ は scaling 関数，$\psi_{k,l}(\boldsymbol{x})$ は wavelet であり，本研究では Haar wavelet および 3 次ゼロモーメント性を有する区間一定非直交 wavelet [1)]のいずれかを ψ として与える．この場合，$\phi_{0,j}$ はいずれの場合も区間一定関数となる．

境界値関数の時間・空間の変動を近似した結果 (空間については式 (4)) を式 (2) に代入し，時間については選点法，境界積分方程式の離散化において Galerkin 法を適用すると，時刻 $t=t_L$ において解くべき次の代数方程式を得る．

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{H}_{1,L}^{(L)}\boldsymbol{u}^{(L)}-\boldsymbol{G}_L^{(L)}q^{(L)}\\&=\sum_{p=1}^{L-1}\left\{-\boldsymbol{H}_{1,p}^{(L)}\boldsymbol{u}^{(p)}+\boldsymbol{H}_{2,p}^{(L)}\boldsymbol{u}^{(p-1)}+\boldsymbol{G}_p^{(L)}\boldsymbol{q}^{(p)}\right\}\end{aligned}\tag{5}$$

ここで，$\boldsymbol{G}_p^{(L)},\boldsymbol{H}_{1,p}^{(L)},\boldsymbol{H}_{2,p}^{(L)}$ は係数行列であり，その成分は切り捨て対象となる．

係数成分の切り捨ては，不要な計算を可能な限り省略する目的で，各係数成分の計算の前後 2 段階で判定する．本手法では，次式を満たす成分が切り捨て対象となる．

Key Words: *2* 次元スカラー波動問題，時間域境界要素法，非直交 *wavelet*，計算効率
連絡先：950-2181 新潟市西区五十嵐二の町 8050 番地　TEL 025 (262) 7274 FAX 025 (262) 7274

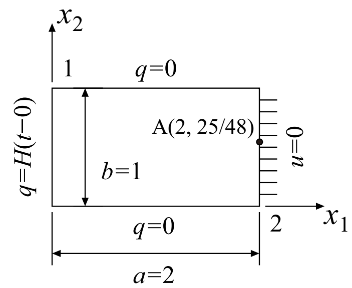
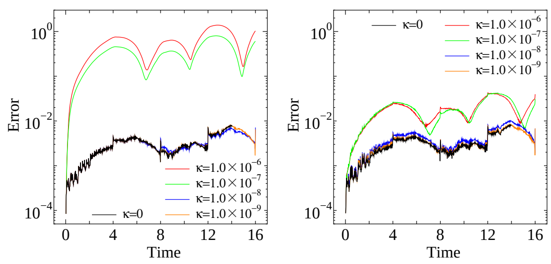


図 1 解析条件.



(a) $n = 1$. (b) $n = 3$.

図 2 ポテンシャル u の誤差 $e(t)$ の時刻歴 ($N = 288$, $\beta = 1$, $\ell_{ref} = 1/48$).

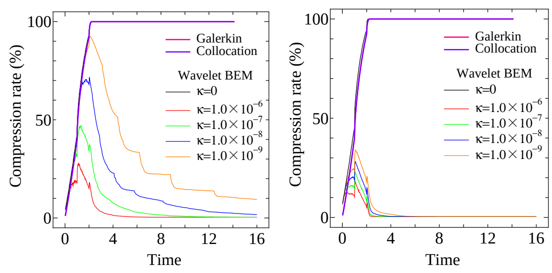
$$
\begin{aligned}
\tilde{g}_{ij}^{(L,p)} &\leq \kappa \cdot g_{ref}, \quad \text{(a priori)} \\
\left| g_{ij}^{(L,p)} \right| &\leq \kappa \cdot g_{ref}, \quad \text{(posteriori)}
\end{aligned}
\tag{6}
$$

ここで，κ は切り捨て基準値，$\tilde{g}_{ij}^{(L,p)}$ は実際に計算される係数行列 $\boldsymbol{G}_p^{(L)}$ の成分 $g_{ij}^{(L,p)}$ の近似評価値，g_{ref} は $g_{ij}^{(L,p)}$ の代表値である．

3. 解析手法の有効性の検討

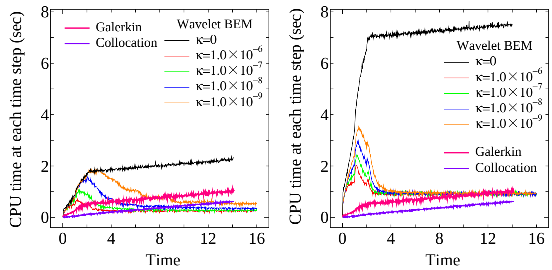
本手法による計算効率の改善効果を検討する目的で，**図-1** に示す境界条件･初期条件の下で波動伝播解析を行った．波動の伝播速度は $c = 1$ とし，区間一定非直交 wavelet を wavelet 基底に用いた．ゼロモーメント次数は，$n = 1, n = 3$ の 2 種類について検討し，ともに 18 個の区間一定 scaling 関数を用いた．また，wavelet 級数の最高階層を $m_r = 3(N = 18 \cdot 2^{m_r+1} = 288)$ とし，時間刻み幅 は，$\Delta t = \beta\ell_{ref}/c(\ell_{ref} = 1/48)$ に設定した．なお，従来法との比較のために，境界値を区間一定関数で近似し Galerkin 法または選点法で離散化した場合の時間域境界要素解析もあわせて行った．また，連立一次方程式の求解計算には，対角スケーリング前処理付き GMRES 法を用いた．

まず，近似解の誤差ノルムを**図-2** に示す．解析結果より，閾値以下の切り捨て基準値を与えて切り捨てを実行することで，近似解の精度を損ねることなく係数行列を疎行列化し，解析時の使用メモリを削減できる可能性があることがわかる．次に，係数行列の圧縮率を**図-3** に示す．解析結果より，$n = 1, n = 3$ ともに，時間が経過するほど係数行列の圧縮率が向上することから，解析対象とする時間が長時間にわたる問題ほど，また高次ゼロモーメント性を有する wavelet 基底を用いるほど使用メモリの削減効果的が大きいことがわかる．また，各解析時刻における計算時間を**図-4** に示す．解析時間の経過とともに一定値に漸近してくるが，従来法の計算時間と比べて同程度かそれ以上の水準であり，wavelet 基底の利用による計算時間の短縮効果は小さい．最後に，反復解法（GMRES 法）の収束性について検討する．解析結果より，高次ゼロモーメント性を有する wavelet を用いた場合ほど，反復解の収束が緩慢になることがわかる．特に，$n = 3$ とした場合には，Haar wavelet ($n = 1$) の場合と比べ，反復回数が 10 倍程度まで増加しており，大規模問題へ適用する際には注意を要する．ただし，反復解法の収束は，不完全 LU 分解等の他の前処理手法へ変更することで大幅な改善が可能であると思われる．



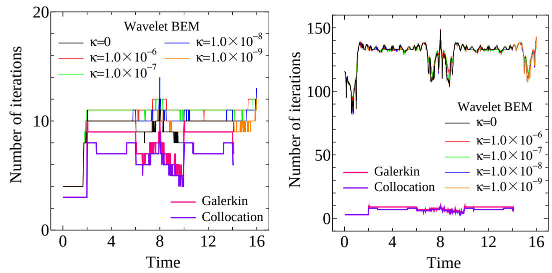
(a) $n = 1$. (b) $n = 3$.

図 3 各解析時刻（各時間ステップ）で追加・生成される係数行列の圧縮率 ($N = 288$, $\beta = 1$, $\ell_{ref} = 1/48$).



(a) $n = 1$. (b) $n = 3$.

図 4 各解析時刻（各時間ステップ）での計算時間の推移.



(a) $n = 1$. (b) $n = 3$.

図 5 各解析時刻（各時間ステップ）での GMRES 法の反復回数.

参考文献

1) Koro, K., Abe, K.: Non-orthogonal spline wavelets for boundary element analysis. *Engrg. Anal. Bound. Elems.*, Vol.25, pp.149-164, 2001.
2) 紅露一寛，古川 陽，阿部和久：スカラー波動問題を対象とした時間域境界要素解析における wavelet 基底の適用．第 58 回理論応用力学講演会論文集，pp.117-118, 2009.