DG/CG 有限要素法による浅水長波流れ解析

中央大学大学院	学生員	牧野	優作
日本工営(株)	正会員	桜庭	雅明
ノートルダム大学	正会員	田中	聖三
中央大学	正会員	樫山	和男

1. はじめに

河川の氾濫,高潮,津波などの数値シミュレーションに は,浅水長波方程式が広く用いられている.浅水長波方程 式は双曲型の方程式であり,移流の卓越に起因する数値不 安定性が生じるため,これまでに様々な安定化手法が提案 されている.有限要素法においては,近年,要素ごとに定 義される要素間で不連続な近似関数を用い,その要素境界 において局所的な Flux の収支を考慮して解析を行う,DG 法 (Discontinuous Galerkin 法)が注目されており,様々な 問題に適用されている.

本論文では,浅水長波方程式の連続式に対して DG 法,運 動方程式に対して CG 法 (Continuous Galerkin 法)を適用 する手法 (DG/CG 法)¹⁾ について提案し,その有効性を検 討するものである.数値解析例として段波問題を取り上げ, 厳密解および従来の CG 法 (SUPG 法に基づく安定化有限 要素法) との結果の比較により DG/CG 法の計算精度,安 定性について検討する.

2. 数值解析手法

2.1 支配方程式

支配方程式には,以下に示す浅水長波方程式を用いる.

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \nabla \cdot (uh) = 0 \qquad on \quad \Omega \qquad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \nabla u + g \nabla (h+z) = 0 \quad on \qquad \Omega \tag{2}$$

ここで, *u* は断面平均流速, *h* は水位であり, *g* は重力加速 度である.

2.2 DG/CG 法による離散化

DG/CG とは,式(1)に対して DG 法を適用し,式(2) に CG 法を適用するものである¹⁾.なお,CG 法としては, SUPG 法に基づく安定化有限要素法を用いた.

(1) に対して DG 法を適用すると,以下の弱形式が得られる.

$$\int_{\tilde{\Omega}} v^{h} \left(\frac{\partial h^{h}}{\partial t}\right) d\Omega - \int_{\tilde{\Omega}} \frac{\partial v^{h}}{\partial x} (uh) d\Omega + \int_{\Gamma_{int}} v\{\mathbf{A}(u^{h}; h^{h-}, h^{h+})\mathbf{n}\} d\Gamma = 0$$
(3)

ここで,要素内部の集合,および各要素の内部境界の集合 をそれぞれ $\tilde{\Omega}$, Γ_{int} とする.また, $\mathbf{A}(u^h;h^{h-},h^{h+})\mathbf{n}$ は数 値フラックスであり,本研究ではRoe Flux を用いる¹⁾.式 (2)に対して SUPG 法を適用すると,以下の弱形式が得ら れる.

$$\int_{\Omega} w^{h} \Big(\frac{\partial u^{h}}{\partial t} + u^{h} \frac{\partial u^{h}}{\partial x} + g \frac{\partial \{\pi h^{h} + z\}}{\partial x} \Big) d\Omega + \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega_{e}} \tau u^{h} \frac{\partial w^{h}}{\partial x} \Big(\frac{\partial u^{h}}{\partial t} + u^{h} \frac{\partial u^{h}}{\partial x} + g \frac{\partial \{\pi h^{h} + z\}}{\partial x} \Big) d\Omega + \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega_{e}} \delta \frac{\partial w^{h}}{\partial x} \Big(\frac{\partial u^{h}}{\partial x} \Big) d\Omega = 0$$
(4)

ここで, πh^h は, h^h を連続な空間 ω^h に投影したものであり,以下の式で表される.

$$\int_{\Omega} w^h(\pi h^h) d\Omega = \int_{\Omega} w^h(h^h) d\Omega \tag{5}$$

また, τ , δ は,安定化パラメータであり,以下のように定義される.

$$\tau = \left(\frac{1}{(\tau_{SUGN1})^2} + \frac{1}{(\tau_{SUGN2})^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$
(6)

$$\tau_{SUGN1} = \left(\sum_{a=1}^{n_{en}} (c \mid \mathbf{j} \cdot \nabla N_a \mid + \mid \mathbf{u}^{\mathbf{h}} \cdot \nabla N_a \mid)\right)^{-1}$$
$$\tau_{SUGN2} = \frac{\Delta t}{2} \quad , \quad \mathbf{j} = \frac{\nabla h^h}{\parallel \nabla h^h \parallel}$$
$$\delta = \frac{||\mathbf{u}^{\mathbf{h}}||h_e^h}{2} \tag{7}$$

$$\delta = \frac{1}{2} \qquad (1)$$

2.3 時間方向の離散化

式(3),(4)は,以下の式で表すことができる.

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} = \mathbf{L}(\mathbf{U}) \tag{8}$$

上式に対して,3次精度陽的 Runge – Kutta 法を適用する と,以下のように離散化できる.

$$\mathbf{U}^{(1)} = \mathbf{U}^n + \Delta t \mathbf{L}(\mathbf{U}^n) \tag{9}$$

$$\mathbf{U}^{(2)} = \frac{3}{4}\mathbf{U}^n + \frac{1}{4}\Big(\mathbf{U}^{(1)} + \Delta t\mathbf{L}(\mathbf{U}^{(1)})$$
(10)

$$\mathbf{U}^{(n+1)} = \frac{1}{3}\mathbf{U}^n + \frac{2}{3}\Big(\mathbf{U}^{(2)} + \Delta t\mathbf{L}(\mathbf{U}^{(2)}) \qquad (11)$$

なお,(3)の質量行列には集中化をし,(4)の連立1次方程 式の解法には,Element-by-Element Bi-CGSTAB 法を適 用する.

KeyWords:
 Discontinuous Galerkin 法,浅水長波方程式

 連絡先:
 〒112-8551 東京都文京区春日 1-13-27
 TEL 03-3817-1808
 FAX 03-3817-1815



2.4 Slope Limiter

2.3 で示した時間方向の離散化により解を求めると,オー バーシュートやアンダーシュート現象が生じ,解が得られ ない場合がある.このような数値不安定性を回避するため に,Slope Limiter 処理を導入する.ここで,図-1 に示す1 次元要素モデルを考える.Limiter 処理は,その対象となる 要素 p 自身と接続された要素 e,wを用いて行われる.ま ず,各要素の中心座標における物理量より,線形関数 L_{*}を 求める.

$$L_{ep} = N_e \phi_e + N_p \phi_p , L_{wp} = N_w \phi_w + N_p \phi_p \qquad (12)$$

$$\phi_e = \phi(\mathbf{x}_e) \ \phi_p = \phi(\mathbf{x}_p) \ \phi_w = \phi(\mathbf{x}_w) \tag{13}$$

また,処理の対象となる要素 p 内においても以下のように 求める.

$$L_p = N_\alpha \phi_\alpha + N_\beta \phi_\beta \tag{14}$$

$$\phi_{\alpha} = \phi(\mathbf{x}^{e}_{\alpha}) \ \phi_{\beta} = \phi(\mathbf{x}^{e}_{\beta}) \tag{15}$$

ここで,Nは,形状関数である.次に,各関数 L_* の勾配 $|\nabla L_*|$, (* = ep, wp, p)を求め,以下の手順によりLimiter 処理を行う.

- 1. 最も勾配 $|\nabla L_*|$ の大きな線形関数を選択し , $L = L_*$ とする.
- 2. 要素 p において,オーバーシュート,もしくはアン ダーシュートの有無を確認する.

$$\min(\phi_e, \phi_p) \le L(\mathbf{x}^{\mathbf{e}}_{\alpha}) \le \max(\phi_e, \phi_p) \tag{16}$$

$$\min(\phi_w, \phi_p) \le L(\mathbf{x}^{\mathbf{e}}_{\beta}) \le \max(\phi_w, \phi_p) \tag{17}$$

- 式 (16) , (17) を満足していなければ , |∇L_{*} | の 2 番目の大きなものを L とし , 2 .に戻る . さらに , こ れも満足していなければ , |∇L_{*} | の最小のものを L とする .
- 4.得られたLを L_p とし , ϕ_lpha , ϕ_eta を修正する .

なお,この処理は,各時間ステップにおいて実行される.

3. 数值解析例

本手法の計算精度と安定性を検討するために,段波問題を 取り上げ,厳密解,CG法との比較を行う.解析モデルを図-2に示す.x方向分割幅0.1[m],微小時間増分量0.01[m/s] とした.



図-4 流速分布

解析結果として,図-3,図-4にそれぞれ1秒後の水面形状,流速分布を示す.これらの図より,CG法による結果では,x=8.0[m]付近でアンダーシュートが発生しているが, DG/CG法による結果では,抑えられていることが確認でき,また,安定に解析ができていることがわかる.

4. おわりに

本論文では,浅水長波方程式に対して,DG/CG 法を適 用し,その有効性を検討した.数値解析例として,段波問 題を取り上げた.DG/CG 法により,数値不連続面でのア ンダーシュートを抑えていることが確認された.また,安 定に解析可能であることが確認された.

今後の課題として,効果的な Limiter 処理の検討,移動 境界問題への適用などが挙げられる.

参考文献

- Dawson,C, Westerrink,J.J., Feyen,J.C, and Pothina,D: Continuous, discontinuous and coupled discontinuouscontinuous Galerkin finite element methods for the shallow water equations, *International Journal of Numerical Methods in Fluids*., 52,pp63-88, 2006
- T.E.Tezduyar : Stabilized finite element formulations for incompressible flow computations, Advance in apploed Mechanics, 28,pp1-44, 1991