

有限要素法による移流拡散解析の拡散を考慮した透過境界条件

株式会社ハルテック 正会員 ○桜井宏之
 日本大学 フェロー 野村卓史
 日本大学 正会員 長谷部寛

1. はじめに

市街地の風を対象とする汚染物質の移流拡散解析において、計算領域境界の拡散に関する境界条件の扱いが不適切だと汚染物質が溜まってしまい、不当に高い濃度になる結果が生じる。このため、境界条件は正しい扱いが必要である。一般に波動伝播等の問題においては、透過境界条件として Mur の条件等が用いられるが¹⁾、拡散の影響は考慮されていない。そこで本研究では、境界における拡散を考慮した透過境界条件について検討した。

2. 基礎方程式と有限要素法による離散化

本研究では、非定常の移流拡散方程式を基礎方程式²⁾とする。

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \nabla(q_i^a + q_i^d) = 0 \quad (1)$$

$$q_i^a = u_i \phi \quad (2)$$

$$q_i^d = -k \nabla \phi \quad (3)$$

ここで、 ϕ は物質の濃度などのスカラー量、 t は時間、 $\nabla = \langle \partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z \rangle^T$ 、 q_i^a は移流フラックス、 q_i^d は拡散フラックス、 $u_i = \langle u, v, w \rangle^T$ は移流速度ベクトル、 k は拡散係数である。

本研究では空間の離散化に安定化有限要素法である SUPG 法、要素には3次元の六面体要素、時間積分法には Predictor-Corrector 法を適用した。

3. 拡散を考慮した透過境界の扱い

本研究では、境界で拡散フラックスが透過することを表すために、式(4)、(5)の境界条件を考え、検討した。

$$\phi_N^{i+1} = \phi_N^i + (1-\beta) \Delta t \cdot q_N^d \quad (4)$$

$$q_N^d = -k \cdot \frac{\phi_N^i - \phi_{N-1}^i}{\Delta x} \quad (5)$$

ここで β を透過量調節係数と呼ぶ。 Δt は時間積分間隔、上付き添字は時間ステップ、下付き添字は節点を表し、 N は境界上の節点である。式(4)の右辺第2項のように、

キーワード 有限要素法、移流拡散解析、透過境界条件

連絡先 〒101-8308 東京都千代田区神田駿河台 1-8-14 日本大学理工学部土木工学科 TEL 03-3259-0411

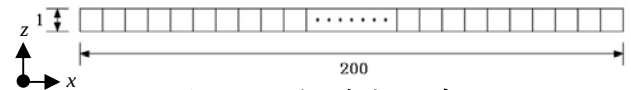


図 1. 1次元解析モデル

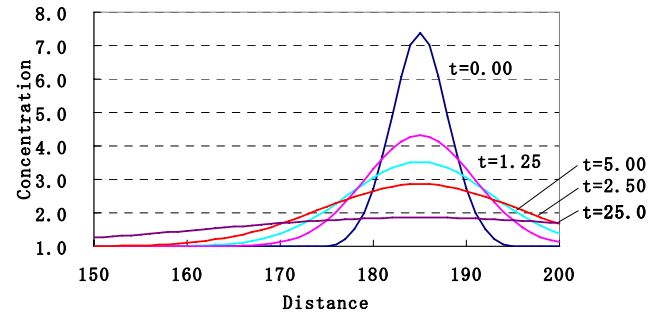
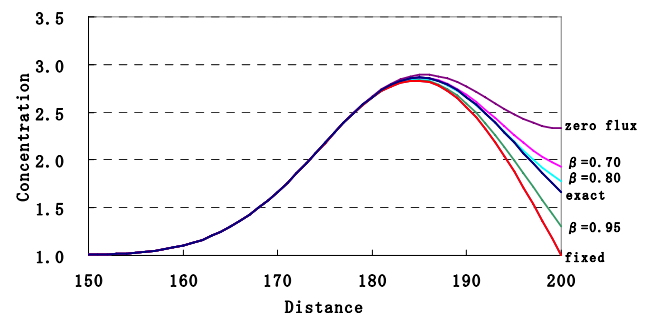
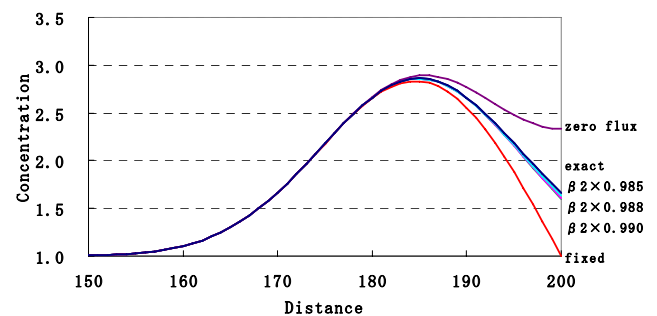


図 2. 初期濃度分布と理想解

図 3. β を一定とした場合の濃度分布 ($t=5.00$)図 4. 時間変化する β_2 による濃度分布 ($t=5.00$)

拡散フラックス q_N^d に時間積分間隔 Δt を乗じた値の割合を係数 β により規定し、境界上節点の濃度 ϕ の変化量として加えることにより、次ステップ ($i+1$) の境界上節点の濃度を評価して、それを境界値として与える方法とした。なお $\beta=1$ は境界の濃度が変わらない濃度規定の条件に相当する。

5. 透過量調節係数の検討

1次元純拡散問題($u_i=0$, $k=10$)で、式(4)、(5)で表される拡散透過境界条件の検討を行った。解析領域として図1に示すようなx軸方向に200要素の長方形領域を用いる。時間積分間隔は $\Delta t=0.005$ で、総計算時間25.0まで計算を行った。ここで、左端は濃度規定の境界($\phi=\bar{\phi}=1$)として与えた。初期濃度分布と時刻ごとの理想解を図2に示す。

図3は同時刻($t=5.00$)における β ごとの濃度分布である。いずれの場合も β を一定値と与えた場合は理想解と比べて不十分な分布となった。

そこで、 β を一定値ではなく、時間変化する値として与えた。式(6)のように、境界より1つ手前の節点($N-1$)に関するフラックスより β_2 を求め、その β_2 に0.985~0.990の係数を乗じて式(4)の β として用いた。

$$\beta_2 = \frac{(\phi_{N-1}^{i+1} - \phi_{N-1}^i) \cdot \Delta x}{\Delta t \cdot k \cdot (\phi_{N-1}^i - \phi_{N-2}^i)} + 1 \quad (6)$$

その結果、理想解に対して良い近似解を得ることができた(図4)。なお、図中には考察のために、右端境界がゼロフラックスの場合($q_n = \bar{q}_n = q_n^d = 0$)と濃度規定の場合($\phi = \bar{\phi} = 1$)の濃度分布も示した。

6. 透過境界条件を適用した2次元純拡散解析

図5に示すような領域で上下の境界条件を変え、2次元解析を行い、その結果を比較した。ここで総要素数はx軸方向に100、y軸方向に30の3000要素を用いた。また初期濃度分布には1次元解析で用いた分布を軸対象にした分布を解析領域中心に与えた。 $u_i=0$, $k=10$, 時間積分間隔は $\Delta t=0.005$ として計算を行った。左右両端の境界は、濃度規定の境界($\phi=1$)とした。

図6に、上下の境界条件が濃度規定の条件($\phi=1$, 図6上段)、フラックス規定の条件($q_n^d=0$, 図6中段)、透過境界条件($\beta_2 \times 0.985$, 図6下段)と異なる3ケースの濃度分布を示す。通常の境界条件を与えた場合と比較すると、透過境界条件を与えた場合には、同心円状の濃度分布となり、理想的な結果が得られた。

【参考文献】

- 1) 野村, 佐藤, 長谷部: 音の伝播解析におけるインピーダンス条件の適用について, 土木学会第64回年次学術講演会, 2009
- 2) 日本計算工学会流れの有限要素法研究委員会: 続・有限要素法による流れのシミュレーション, シュプリンガー・ジャパン, 2008

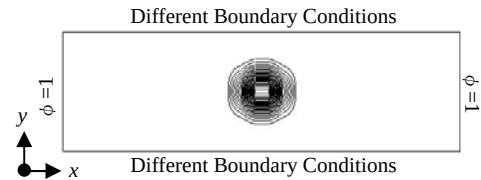


図5. 2次元解析の初期条件

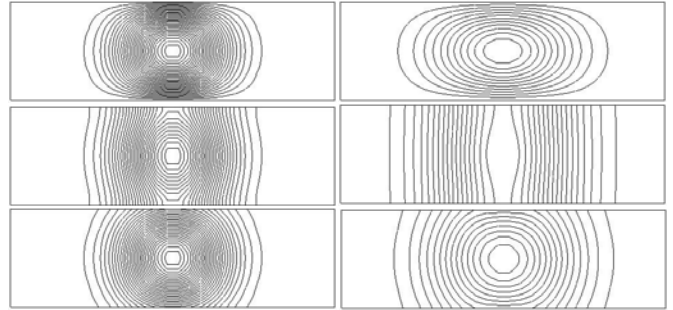


図6. 2次元解析の濃度分布(左: $t=5.00$, 右: $t=10.0$)

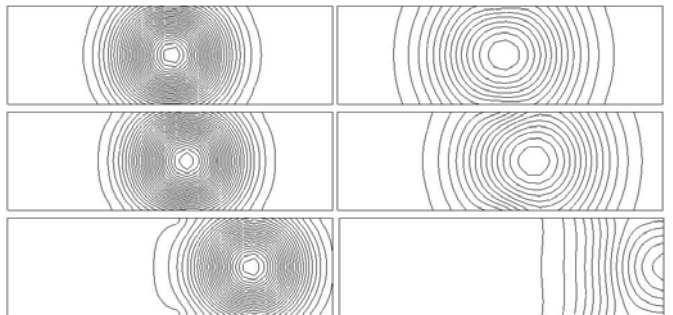


図7. 移流拡散解析の濃度分布(左: $t=5.00$, 右: $t=10.0$)

7. 2次元の移流拡散解析

2次元の純拡散解析と同様の領域、初期濃度分布、拡散係数($k=10$)を用い、移流速度 u のみを0.1, 1, 5と変化させた移流拡散解析を行い、その結果を比較した。ここで左端の境界は濃度規定の条件($\phi=1$)、その他の境界は透過境界条件を与えた。

図7に $Pe=0.01$ ($u=0.1$, 図7上段), $Pe=0.1$ ($u=1$, 図7中段), $Pe=0.5$ ($u=5$, 図7下段)の結果を示す。この結果から、Peclet数が小さい場合には理想に近い結果が得られることがわかった。

8. おわりに

本研究では、拡散を考慮した透過境界条件を考え、境界内側の拡散フラックスから境界濃度の変化を評価する方法を検討した。拡散フラックスの空間的变化を考慮する係数を用いることによって、純拡散問題および低いPeclet数のときには良好な解が得られることがわかった。今後、Peclet数が高い場合での、検討が必要である。