

定常地下水流動問題に対する混合ハイブリッド有限要素法の適用例

大成建設株式会社 正会員 ○鈴木 俊一
 独立行政法人原子力安全基盤機構 正会員 青木 広臣
 独立行政法人原子力安全基盤機構 非会員 川上 博人

1. 目的

地下水流動解析に必要なとなる地表面下の地盤構成及び地盤物性は、一般に原位置における試験や地質統計学に基づき設定されるが、解析対象領域における地盤物性（特に、透水係数）については、数オーダーの範囲で分布することがしばしば起こりえる。こうした透水係数の不均質性は、有限要素法（有限体積法）に代表される離散化数値解析手法を用いる場合、地下水流動方程式に対する数値解の精度低減を引き起こす要因となる要素（コントロール・ボリューム）間での透水係数の不連続性を引き起こすこととなり、多くの既往検討成果（例えば、[1], [2]）によれば、非退化形式の地下水流動方程式を対象に有限要素法による離散化を行った場合、主変数（圧力）の微分により得られる流速ベクトルに対する精度低減が明らかとなっている。放射性廃棄物処分施設の安全評価において、地下水の流速ベクトルは、粒子追跡解析による移流現象のみに着目した核種の移行時間の算定や移流分散方程式により直接的に核種移行解析を実施する際の重要な因子となり、流速ベクトルを精度良く近似することが極めて重要となるのは明らかである。同様の問題は、地下水流動問題のみならず、構造力学の分野においても古くから認識されており、その解決方法の一つとして、変位と応力の双方を変数とする汎関数の停留値について記述された Reissner の変分原理により導かれる混合型有限要素法が古くから提案されている。地下水流動問題に対する混合型有限要素法の適用については、古くは Meissner[1]により示されているが、Meissner の手法では非正定値行列を有する大規模線形方程式となる短所を有しており、これを回避する手法として、Arnold と Brezzi ら[3]による混合ハイブリッド有限要素法が提案されている。本稿では、最低次 Raviart-Thomas 形状関数を用いた混合ハイブリッド有限要素法により、仮定の坑道型の放射性廃棄物処分施設を対象に施設部及びその周辺の流速ベクトルを算出し、その精度を解析解と比較した。

2. 混合ハイブリッド法による定常地下水流動方程式の弱形式化

定常地下水流動方程式を混合ハイブリッド法により個別の要素に対する弱形式化を行うと以下の式を得る。式 1 はダルシーの法則、式 2 は物質質量保存則、式 3 はノイマン条件を表現している。混合ハイブリッド法の特徴としては、節辺平均流速 u_h 、節辺平均圧力 tp_h 及び要素内平均圧力 p_h を変数としていること、更に、式 2 で表されるように個々の要素において物質量の保存を考慮していることにある。

$$\int_{\Omega} (\mathcal{K}^{-1} u_h) \cdot \chi_h dx + \sum_{K \in Q_h} \int_{\partial K} tp_h \nu_K \cdot \chi_h dl = \sum_{K \in Q_h} \int_K p_h \nabla \cdot \chi_h dx \quad \forall \chi_h \in \mathcal{V}(Q_h) \quad \text{式 1}$$

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot u_h \varphi_h dx = \int_{\Omega} f \varphi_h dx \quad \forall \varphi_h \in \mathcal{M}(Q_h) \quad \text{式 2}$$

$$\sum_{K \in Q_h} \int_{\partial K} u_h \cdot \nu_K \lambda_h dl = \int_{\partial \Omega} q^N \lambda_h dl \quad \forall \lambda_h \in \mathcal{N}_{0,D}(\varepsilon_h) \quad \text{式 3}$$

$\mathcal{V}(Q_h)$ 、 $\mathcal{M}(Q_h)$ 及び $\mathcal{N}_{0,D}(\varepsilon_h)$ は、混合有限近似空間であり、本検討においては、 $\mathcal{V}(Q_h)$ は以下に示すように最低次 Raviart-Thomas 空間とした。

$$\mathcal{V}(Q_h) = RT_0(Q_h) = \{ \chi \in L^2(\Omega) \mid \chi|_K \in RT_0(K), K \in Q_h \}$$

キーワード 放射性廃棄物処分, 地下水流動, 流速ベクトル, 混合ハイブリッド法, 誤差
 連絡先 〒163-6009 東京都新宿区西新宿 6-8-1 Tel: 03-5381-5315

$M(Q_h)$ については、各要素に対し、以下に示すように区分一定関数とした.

$$M(Q_h) = \{ \varphi \in L^2(\Omega) \mid \varphi/K \in \mathcal{P}_0(K), K \in Q_h \}$$

2. 解析対象領域と解析条件

一般に、坑道型の放射性廃棄物処分施設の場合、坑道掘削時に坑道の周辺に高透水性となり得る掘削影響領域が発生するため、難透水性材料にて構成される放射性廃棄物処分施設の周辺に高透水性が存在することとなり、施設への地下水の浸入水量や核種移行解析に使用する流速ベクトルを精度良く算出するためには、透水係数のコントラストが極めて大きくなる掘削影響領域周辺の地下水の流向・流速を精度よく算出することが必要となる. 混合ハイブリッド法による定常飽和地下水流動問題の精度確認にあたっては、図-1及び図-2に示すような2次元問題において、代表的な要素における要素中心流速ベクトルを解析解と比較することとした. 同問題を検証問題として採用した理由は、放射性廃棄物処分施設閉鎖後の比較的早い地下水流動は定常状態となること、多重同心円上の領域に対する任意点の全水頭の理論解[4]が与えられているため、領域内の任意点の流速ベクトルの数値解と理論解の比較が可能となるためである. 境界条件としては、モデルの上下端を不透水境界、左右両端を全水頭固定境界とし、モデル全体の大域的な動水勾配が0.1となるよう設定した.

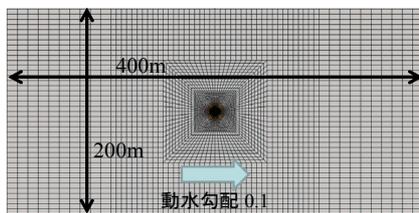


図-1 モデル全体図
表 1 透水係数の一覧

部材名	透水係数 [m/yr]
廃棄体層	3.15E+0
緩衝材	3.15E-7
裏面排水層	3.15E+3
岩盤	3.15E-3

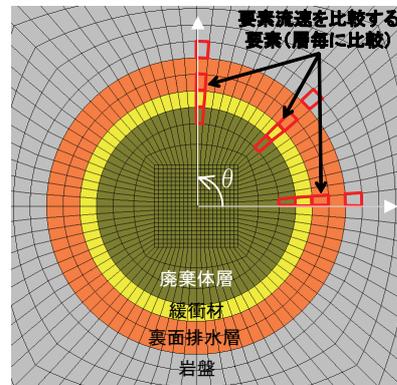


図-2 モデル拡大図 (坑道周辺)

3. 解析結果と考察

要素流速を比較した要素は、図-2中の赤点線枠で周囲を囲んだ要素である. 混合ハイブリッド法による数値解と理論解の結果を表-2に示す. これらの結果より、要素中心の流速ベクトルの相対誤差は、最大で3.3%となっており、精度良く流速ベクトルを算出していることがわかる. 混合ハイブリッド法は非退化形式有限要素と比べて、流速ベクトルの近似次数が1次高いこと、個別要素における物質量を保存していることから、今後は、非退化形式有限要素法と当手法による粒子追跡解析に対する比較検証を行う予定である.

表 2 計算結果

	要素位置	混合ハイブリッド 数値解		理論解		ベクトル 相対誤差 %
		Vx m/yr	Vy m/yr	Vx m/yr	Vy m/yr	
廃棄体層	0度	2.413E-12	5.710E-16	2.410E-12	1.240E-30	0.143
	45度	2.414E-12	2.702E-14	2.410E-12	3.980E-29	1.134
	90度	2.422E-12	-5.356E-16	2.410E-12	6.220E-30	0.511
緩衝材	0度	2.239E-12	8.120E-14	2.230E-12	8.090E-15	3.303
	45度	1.288E-12	1.032E-12	1.280E-12	1.030E-12	0.510
	90度	1.752E-13	8.120E-14	1.750E-13	8.100E-14	0.155
裏面排水層	0度	2.042E-04	-1.098E-04	2.040E-04	-1.100E-04	0.127
	45度	1.489E-03	-1.394E-03	1.490E-03	-1.390E-03	0.223
	90度	2.992E-03	-1.097E-04	2.990E-03	-1.100E-04	0.077
岩盤	0度	5.993E-04	2.230E-05	5.980E-04	2.230E-05	0.217
	45度	3.382E-04	2.833E-04	3.380E-04	2.830E-04	0.069
	90度	3.245E-05	2.233E-05	3.240E-05	2.230E-05	0.137

参考文献

[1] Udo Meissner : A mixed finite element model for use in potential flow problems, INTERNATIONAL JOURNAL FOR NUMERICAL ENGINEERING, VOL.6, 467-473, 1973, [2] R. Mose, et al.; Application of the mixed hybrid finite element approximation in a groundwater flow model: Luxury or necessity?, WATER RESOURCES RESEARCH, VOL.30, NO.11, PAGES 3001-3012, NOVEMBER 1994, [3] Arnold, D.N., and F.Brezzi : Mixed and nonconforming finite element methods: Implementation, post processing and error estimates, Math. Modell. Numer. Anal., 19, 7-32, 1985, [4]鈴木ら: 局所不連続 Galerkin 法による放射性廃棄物処分施設を対象とした地下水流動・核種移行解析の高度化, 土木学会論文集C, Vol. 65, No. 3, pp.703-715, (2009).