

曲線レールの曲率等が座屈温度に及ぼす影響

新潟大学大学院自然科学研究科 学生員 田中 洋介
 新潟大学工学部建設学科 正会員 阿部 和久
 新潟大学大学院自然科学研究科 正会員 紅露 一寛

1. はじめに

ロングレールは列車走行時の振動・騒音の低減に有効であり、乗り心地の向上や軌道保守コストの縮減などの効果が期待できる。しかしその一方で温度変化から受ける影響が定尺レールよりも大きく、温度座屈を起こしやすいため、ロングレールを使用・管理するにあたって、温度変化を受けた際のレールの座屈挙動をより正確に把握することが重要である。

レールの座屈荷重は初期不整鋭敏性を有するため、実務上はレールに適切な初期不整を与えた上での座屈荷重を評価することが必要である。そのため既往の研究¹⁾では、初期不整を有するレールの初期形状と座屈発生後のレールの変形状とを想定し、たわみ近似式にエネルギー法を適用することで座屈発生荷重や各種軌道条件の寄与度を明らかにしている。

当研究室では直線ロングレールを無限周期構造によりモデル化し、完全系における温度座屈を対象に座屈荷重を理論的に求め変形局所化の発生メカニズムの考察を行った²⁾。

なお、曲線部を含むレールは直線レールに比べ、著しく座屈荷重が低下することが知られている。その一つの原因は、曲線部が前後の直線部に対する一種の初期不整と見なし得る点にあるものと思われる。しかし、その影響の中には道床横抵抗力の非線形性に因る剛性低下も含まれており、これらの関与の程度が判然としない。そこで本研究では、一定曲率下で無限に続く曲線レールを想定し、レールの曲率や道床横抵抗力が座屈荷重に及ぼす影響について調べる。

そのために、曲線レールを離散締結された螺旋状無限長はりで与え、つり合い経路の追跡を行う。その下で接線剛性行列が特異となる変位速度モード波数を調べる。

2. 無限長曲線レールの分岐点探索

(1) 円弧ばりの定式化

図1のような、一定曲率を有する円弧ばりを考える。ここで、 R は曲率半径、 N はレール軸力、 u, v はそれぞれ接線方向変位、半径方向変位である。図で示されるような座標系の下で、軸ひずみ ε は次式で与えられる。

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + y\Delta\kappa \tag{1}$$

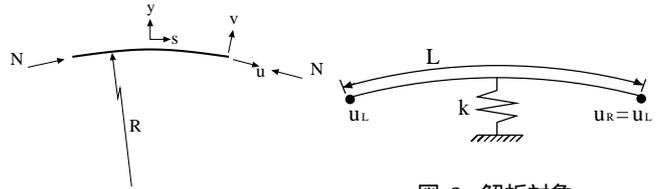


図1 要素座標系

ここで、 ε_0 は中立軸上の軸ひずみ、 $\Delta\kappa$ は曲率増分であり、それぞれ次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \varepsilon_0 &= \frac{du}{ds} + \frac{v}{R} + \frac{1}{2} \left(\frac{dv}{ds} \right)^2 \\ \Delta\kappa &= -\frac{v}{R^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial s^2} \end{aligned} \tag{2}$$

すると、円弧ばり要素におけるひずみエネルギー U は次式で与えられる。

$$U = \int_0^L \left(\frac{EA}{2} \varepsilon_0^2 + \frac{EI}{2} \Delta\kappa^2 - N_T \varepsilon_0 \right) ds \tag{3}$$

ここで、 $N_T = EA\alpha T$ であり、 EA, α, T はそれぞれ伸び剛性、線膨張係数、現温度である。

今、 u と v を補間関数 ϕ_i 、節点変位パラメータ u_i, v_i を用いて次のように補間近似するものとする。

$$u = \sum \phi_i u_i, \quad v = \sum \phi_i v_i \tag{4}$$

式(3)の U を u_i, v_i について偏微分し、等価節点力 F_i, P_i を得る。

$$\frac{\partial U}{\partial u_i} = F_i, \quad \frac{\partial U}{\partial v_i} = P_i \tag{5}$$

式(5)を増分分解して、次の方程式を得る。

$$[\mathbf{K}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, T)] \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{u}} \\ \dot{\mathbf{v}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{F}}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \\ \dot{\mathbf{P}}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \end{Bmatrix} \tag{6}$$

ここで、 $\{\mathbf{u}\}, \{\mathbf{v}\}$ は節点変位ベクトル、 $\{\dot{\mathbf{u}}\}, \{\dot{\mathbf{v}}\}$ は変位速度ベクトル、 $\{\dot{\mathbf{F}}\}, \{\dot{\mathbf{P}}\}$ は単位温度上昇により生ずる等価節点力ベクトルである。また、 $[\mathbf{K}]$ は接線剛性行列であり、次式により与えられる。

$$[\mathbf{K}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 U}{\partial u_i \partial u_j} & \frac{\partial^2 U}{\partial u_i \partial v_j} \\ \frac{\partial^2 U}{\partial v_i \partial u_j} & \frac{\partial^2 U}{\partial v_i \partial v_j} \end{bmatrix} \tag{7}$$

(2) 無限長レールのモデル化

本研究では、無限長曲線レールを、バネによって離散支

Key Words: 曲線ロングレール, 温度座屈

連絡先: 950-2181 新潟市西区五十嵐二の町 8050 番地 TEL 025 (262) 7028 FAX 025 (262) 7021

持された無限周期構造をもつ Euler ばりでモデル化する．

ここで，図 2 のように無限周期構造の 1 ユニットを解析領域とし，両端の節点変位が等しくなるように境界条件を課すことで，無限長曲線レールの一様な変形を表現する．また，まくらぎ 1 本あたりのばね定数 k は最終道床横抵抗力 $k_0 = 5786\text{N/m}$ ，係数 $a = 3 \times 10^{-4}\text{m}$ とし次式により非線形となるように与える．

$$k = k_0 \cdot \frac{u}{|u| + a} \quad (8)$$

(3) 分岐点の探索

本研究で対象としている曲線レールは，直線レールとは異なり，温度上昇により座屈前の時点で既に半径方向へのはらみ出しが発生する．そこで，Newton-Raphson 法によりつり合い経路を追跡しながら，各温度増分段階で以下に述べる方法により接線剛性行列が特異となる変位速度モード波数を探索した．

式 (6) の下で得られる変位速度 $\{\dot{\mathbf{u}}\}$ ， $\{\dot{\mathbf{v}}\}$ として，波数 κ ($0 \leq \kappa \leq 2\pi$) を有するモードを仮定する．このとき，ユニット両端の節点変位速度ベクトル，等価節点力ベクトルにはそれぞれ次の関係が成り立つ．

$$\begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{u}}_R \\ \dot{\mathbf{v}}_R \end{Bmatrix} = e^{-i\kappa L} \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{u}}_L \\ \dot{\mathbf{v}}_L \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{F}}_R \\ \dot{\mathbf{P}}_R \end{Bmatrix} = -e^{-i\kappa L} \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{F}}_L \\ \dot{\mathbf{P}}_L \end{Bmatrix} \quad (9)$$

式 (6) に式 (9) の関係を代入し，右端節点成分を消去することにより得られる接線剛性行列 $[\mathbf{K}]$ の縮約行列を $[\tilde{\mathbf{K}}]$ とおく．ここで，つり合い経路上において，波数 κ の変位速度モードにおける唯一性の喪失条件は次式に示すように，固有値問題における何れかの固有値がゼロとなる条件として与えられる．

$$[\tilde{\mathbf{K}}]\{\phi_i\} = \lambda\{\phi_i\}, \quad \lambda = 0 \quad (10)$$

ここで， λ は $[\tilde{\mathbf{K}}]$ の固有値， ϕ_i は λ に対応する固有ベクトルである．

本研究では，式 (10) に基づき各波数 κ における固有値を順次調べ，固有値 $\lambda = 0$ を与える波数を調べた．

3. 解析結果

50N レールを想定し，横方向の曲げ剛性 $EI = 663\text{kN} \cdot \text{m}^2$ ，まくらぎ間の距離 $L = 0.60\text{m}$ とし，曲率半径 $R = 500, 800, 1000, 1500, 2000\text{m}$ の 5 ケースで解析を行った．

図 3 に各温度上昇量に対する分岐モード波数の分布を示す．図 5，図 6 に曲率と座屈時の温度，半径方向たわみ v との関係を示す．図から，曲線レールは直線レールよりも大きく座屈温度が低下し，曲率半径の減少と共に座屈モードの波長は長くなっていくことがわかる．これは，

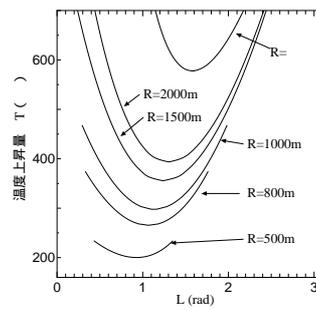


図 3 $\kappa - \Delta T$ 曲線 (非線形)

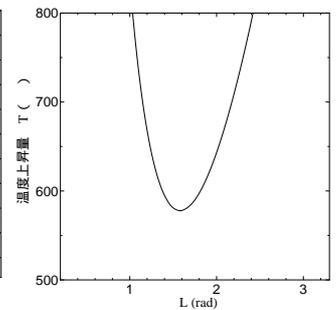


図 4 $\kappa - \Delta T$ 曲線 (線形)

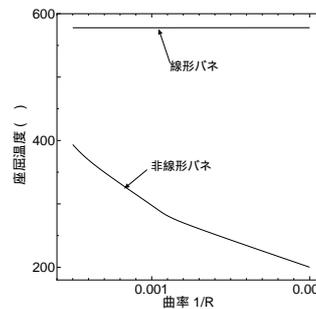


図 5 曲率と座屈温度

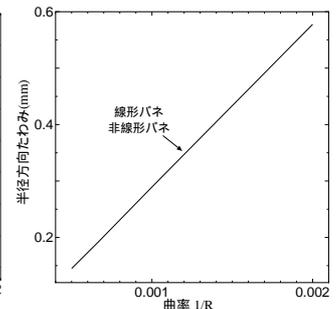


図 6 曲率と座屈時たわみ

座屈前の半径方向へのはらみ出しが起き，バネの非線形性の影響で道床横抵抗力が低下したためと考えられる．また，曲率が大きくなると，上述の曲線レールの影響が顕著に現れてくることも図から確認できる．

非線形バネの代わりに線形バネを用いた場合の同様の解析結果を図 4 と図 5 中に示す．この場合においても，座屈前のはらみ出しは起こるものの，バネの道床横抵抗力は低下しない．この場合は，図のように直線レールの場合とほぼ同等の解析結果が得られ，曲率半径が座屈温度に及ぼす影響もほとんどないことがわかる．図 5 から，非線形バネを用いた場合であっても，通常に比べ高い座屈温度であることが確認できる．現実のレールには，軌道変位による初期不整が存在しており，道床横抵抗力の非線形性の下で大幅に座屈強度が低下するものと思われる．

また，図 6 から，道床横抵抗力の非線形性の有無によらず，座屈時のはらみ出し量は曲率にほぼ比例することがわかる．

4. おわりに

本研究では，レールの曲率と道床横抵抗力が座屈温度に及ぼす影響を分岐解析により調べた．その結果，道床横抵抗力の非線形性に起因して，曲率半径の減少に伴う座屈温度の急激な低下が発生することが明らかになった．

参考文献

- 1) 宮井徹：エネルギー法による軌道座屈の数値解析，鉄道技術研究報告，No.1271(施設編第 554 号)，1984.
- 2) 阿部和久，田中洋介，西宮裕騎，紅露一寛：レール温度座屈時の分岐過程に関する一考察，鉄道力学論文集，Vol.13, pp7-14 (2009.7)