

軸力を受ける無限長曲線レールの波動伝播解析

新潟大学大学院自然科学研究科 学生員 石川 大地
 新潟大学工学部建設学科 正会員 阿部 和久
 新潟大学大学院自然科学研究科 正会員 紅露 一寛

1. はじめに

本来レールは温度変化によって膨張・収縮を受ける。しかし、まくらぎに締結されているため、自由な伸縮がある程度拘束される。その結果、レールには長手方向に大きな圧縮または引張の軸力が作用することになり、それは、レールの座屈・破断の原因となる。

本研究では、軸力を受ける無限長レールの波動分散解析を通して、レールを伝わる波動の分散特性と軸力との関係に着目した軸力測定法について検討を行ってきた¹⁾。

しかしこれまでの解析対象は直線レールであり、軌道の座屈荷重が曲率存在下で低下する事に鑑みると、曲率が分散特性に及ぼす影響について検討する必要があると思われる。そこで本研究では、曲線レールを対象としてに軌道系の分散特性を調べる。

以下ではまず、離散支持された無限長曲線レールを、軸力を受ける円弧ばりの仮想仕事式に基づき記述する。次にそれを構成する周期構造の最小単位であるユニットセルを離散化した後、Floquet 原理を適用し、円振動数 ω と Floquet 波数 κ および軸力 N_0 に関する固有値問題を導出する。この固有値問題を解くことで周波数 $f(\omega)$ と Floquet 波数 κ および軸力 N_0 との関係(分散曲面)を求めていく。その結果に基づき曲率が分散特性に及ぼす影響について調べる。

2. 軸力を受ける円弧 Timoshenko ばりのたわみ振動問題

本研究では、無限長曲線レールを円弧 Timoshenko ばりでモデル化する。軸力 N_0 (圧縮を正) の下で水平面内において円振動数 ω で振動している曲率半径 R の円弧ばりを考える。離散化に際し、1 要素における仮想仕事式は次式により与えられる。

$$\begin{aligned} & \int_0^l \left\{ EA \left(\frac{du}{ds} + \frac{v}{R} \right) \left(\frac{d\delta u}{ds} + \frac{\delta v}{R} \right) \right. \\ & \quad - N_0 \frac{dv}{ds} \frac{d\delta v}{ds} + EI \left(\frac{v}{R^2} + \frac{d\psi}{ds} \right) \left(\frac{\delta v}{R^2} + \frac{d\delta\psi}{ds} \right) \\ & \quad \left. + GAK \left(\psi - \frac{dv}{ds} \right) \left(\delta\psi - \frac{d\delta v}{ds} \right) \right\} ds \\ & = \int_0^l \rho A \omega^2 (v \delta v + u \delta u + \psi \delta \psi) ds + \frac{N_0}{R} \int_0^l \delta v ds \\ & \quad + [Q \delta v + (N_0 - N) \delta u - M \delta \psi]_0^l \end{aligned} \quad (1)$$

ここで、 E はヤング係数、 A は断面積、 ρ は密度、 I は断面二次モーメント、 G はせん断弾性係数、 K は断面のせん断係数、 u はレール長手方向変位、 v は半径外向き方向たわみ、 ψ は断面の回転角、 l は要素長である。また、 $\delta(\cdot)$ はそれぞれ仮想変位、 Q, N, M はそれぞれ要素端断面力である。式(1)において、 u, v を 3 次 Hermite 補間、 ψ を 2 次 Lagrange 補間により与え離散化した後、動的成分を半径方向の静的たわみ成分から分離・抽出すると次式を得る。

$$[K]\{U\} - \omega^2 [M]\{U\} = \{F\} \quad (2)$$

ここで $[K]$ はレールの剛性行列、 $[M]$ は質量行列、 $\{U\}, \{F\}$ は節点変位・節点力ベクトルである。

3. 軸力を受ける無限長曲線レールの分散解析

曲線レールを、まくらぎ離散支持された無限周期構造によりモデル化する。Floquet 原理より、周期構造における自由振動問題において次式を得る。

$$U_3 = U_1 e^{-i\kappa L}, \quad F_3 = -F_1 e^{-i\kappa L} \quad (3)$$

ここで、 L は周期長(まくらぎ間隔)、 $(\)_1, (\)_3$ は当該周期構造を与える 1 ユニットの左右レール端における節点ベクトル、 κ は Floquet 波数と呼ばれるパラメータである。

式(3)を式(2)に適用し、道床横抵抗力とまくらぎ質量の影響をさらに反映させ、次式を得る。

$$[\hat{K}]\{\hat{U}\} = \omega^2 [\hat{M}]\{\hat{U}\} \quad (4)$$

ここで $\{\hat{U}\} = \{U_1 \ U_2\}$ であり、 $[\hat{K}], [\hat{M}]$ は U_3 を消去して得られる行列である。式(2)における行列 $[K], [M]$ は実対称行列であるので、式(4)の係数行列は Hermite 行列となる。この固有値問題を ω に関して解くことで、円振動数 ω と Floquet 波数 κ と軸力 N_0 との関係(分散曲面)を求める。以下の解析では、Floquet 波数 κ と軸力 N_0 を所定の範囲内で順次変化させながら、円振動数 ω についての固有値問題を解き、その結果より分散曲面を求める方法を用いる。

(1) 解析条件

図1は水平方向振動におけるモデル化を示しており、まくらぎの質量を m_s 、動的道床横抵抗力は線形バネ k で与え

Key Words: レール, 軸力, 振動

連絡先: 950-2181 新潟市西区五十嵐二の町 8050 番地 TEL 025 (262) 7028 FAX 025 (262) 7021

表 1 50N レールの各種諸条件

密度 (kg/m ³)	$\rho = 7880$
断面積 (m ²)	$A = 64.05 \times 10^{-4}$
ヤング係数 (GPa)	$E = 206$
ポアソン比	$\nu = 0.33$
断面二次モーメント (m ⁴)	$I = 322 \times 10^{-8}$
せん断係数	$K = 1.382$

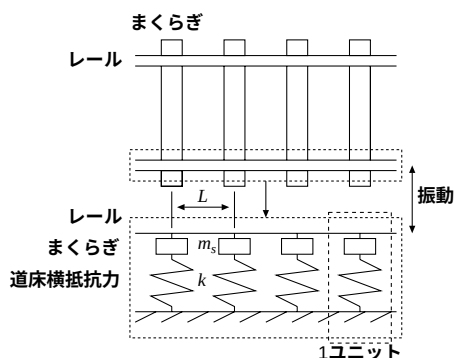


図 1 水平方向振動のレールモデル

る。レールとまくらぎとは一体化しているものとする。道床横抵抗力のバネ定数は6MN/mとする。まくらぎ間隔は $L=0.6\text{m}$ とし、PCまくらぎを想定してレール一本当りのまくらぎ(1/2本)質量を100kgと設定した。レールは50kgNレールを想定し、各種物性値を表1のように設定した。なおレールの離散化は1ユニットを12要素で一様分割して与えた。

(2) 解析結果

周波数 f とFloquet波数 κ および軸力 N との関係は三元空間中の曲面として与えられる。そこで、曲率半径 $R=600\text{m}$ とした場合を例に、軸力を0から1MN毎に6MNまで変化させたときの、無次元化したFloquet波数 κL と周波数 f との関係を図2に示す。図の左側に文献¹⁾には見られなかった直線aが存在する。これは曲線はりモデルで考慮したレール長手方向変位 u の存在によって生じる縦波のモードである。直線a以外は文献¹⁾に示した直線レールの結果と一致した。なお、他の曲率半径でも解析した結果、実際のレールが有する範囲内の曲率は、分散特性に影響しないことがわかった。

(3) 道床横抵抗力のバネ定数が分散特性に及ぼす影響

文献¹⁾では、 $\kappa = \pi/L$ でのまくらぎ位置が節となるレールたわみモードが軸力測定に適しているとの結論を得た。道床横抵抗力のバネ定数が当該モードに及ぼす影響をみるために、 $k=1\text{MN/m}$ 、および $k=15\text{MN/m}$ とした場合の解析

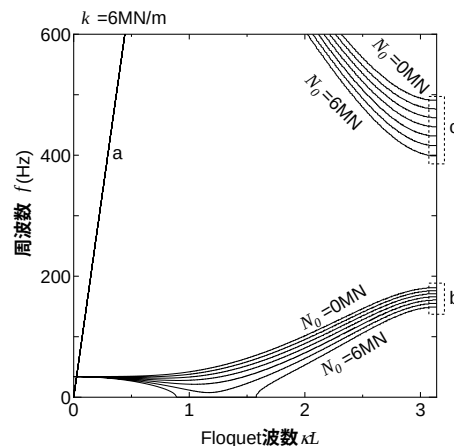
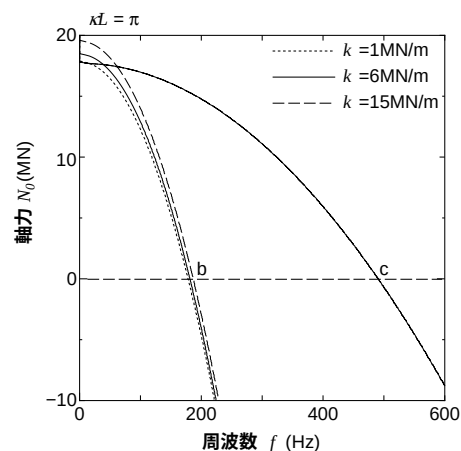
図 2 Floquet 波数 κL と周波数 f と軸力 N_0 との関係

図 3 道床横抵抗力のバネ定数が分散曲面に及ぼす影響

を行った。b,cの振動モードの分散曲面を $\kappa = \pi/L$ において周波数-軸力の断面で切断したものを図3に示す。文献¹⁾の直線軌道モデルと同様に、cの振動モードはまくらぎ位置が節となるものであり、バネ定数の影響を全く受けず、軸力測定において道床横抵抗力のバラツキが支障をきたさないことがわかる。

4. おわりに

本研究では、軸力を受ける無限長曲線レールの動的問題について解析し、曲率が波動分散特性に及ぼす影響を調べた。その結果、実際のレールが有する範囲内の曲率は分散特性に影響を与えないことを確認した。

今後は曲線レールの前後に直線レールが存在している場合の動的解析を行い、今回得られた軸力-周波数関係の妥当性を確認していく予定である。

謝辞 本研究は科研費(21560499)の助成を受けたものである。

参考文献

- 1) 清水紗希, 阿部和久, 相川明, 紅露一寛: 軸力を受けるレールの波動伝播解析, 計算数理工学論文集, Vol.9, No.13-091211, 2009.12