

# 軸力を受ける3次元軌道モデルの波動伝播解析

新潟大学大学院自然科学研究科 学生員 清水 紗希  
 新潟大学工学部建設学科 正会員 阿部 和久  
 (財)鉄道総合技術研究所 正会員 相川 明  
 新潟大学大学院自然科学研究科 正会員 紅露 一寛

## 1. はじめに

レールは温度変化によって膨張・収縮する。そのため、レールは長手方向に圧縮または引張の軸力を受けることになる。この軸力はレールの座屈・破断の原因となるので、レールの受けている軸力を把握することは軌道管理上重要となる。

当該軸力の測定を目的にこれまでに様々な方法が検討されてきたが、それぞれに短所があり条件に合うものがないのが現状である<sup>1)</sup>。特に、軸力のない状態での初期値の測定を必要とする点が共通した問題点として挙げられる。

そこで本研究では、レールを伝わる波動の伝播特性と軸力との関係に着目し、軸力測定の可能性についての基本的検討を行う。なお、当該法については、実験による検討がなされており、その適用可能性が示唆されている<sup>2)</sup>。しかし、その理論的背景については議論がなされておらず、十分な理解には至っていない。

著者らは、これまでに軸力を受ける波動モード解析に基づき当該測定手法の可能性について検討した<sup>3)</sup>。そこではレールを1次元 Timoshenko ばりで、まくらぎを質点でモデル化し、鉛直・水平たわみ振動モードについて分散解析を行った。しかしこの場合、捩り振動、まくらぎ振動モードの影響、左右レールの相関等を評価することができない。

そこで本研究では、3次元はり要素を用い、左右レール・まくらぎから構成される軌道系を対象に、軸力下での波動分散解析を行う。なお、解析では水平・鉛直たわみと捩り振動の影響を考慮する。以下ではまず、軸力を受けるはりのたわみ振動の運動方程式を記述する。次に軌道系を構成する周期構造の最小単位であるユニットセルを離散化した後、Floquet 原理<sup>4)</sup>を適用し、円振動数  $\omega$  と Floquet 波数  $\kappa$  および軸力  $N$  に関する固有値問題を導出する。この固有値問題を解くことで、周波数  $f(\omega)$  と Floquet 波数  $\kappa$  および軸力  $N$  との関係(分散曲面)を求めていく。そして軸力測定に適する振動モードについて検討する。

## 2. 軸力を受けるはりのたわみ振動問題

レール、まくらぎを Timoshenko ばりでモデル化する。軸力を受けるはりのたわみ振動のつりあい式から、次の運動方程式が得られる。

$$EI \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + GAK \left( \frac{\partial u}{\partial x} - \psi \right) + \rho I \omega^2 \psi = 0 \quad (1)$$

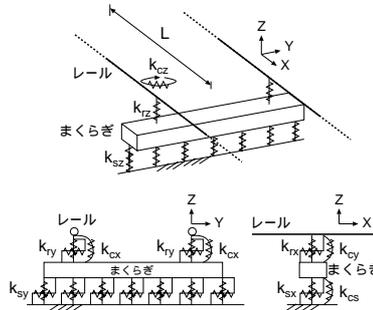


図1 軌道モデル

表1 各バネ定数 (MN/m), (MN · m/rad)

|          |                     |
|----------|---------------------|
| $k_{rx}$ | 0.4                 |
| $k_{ry}$ | 0.96                |
| $k_{rz}$ | 110                 |
| $k_{cx}$ | $3.852 \times 10^5$ |
| $k_{cy}$ | 0.29                |
| $k_{cz}$ | $6 \times 10^{-3}$  |
| $k_{sx}$ | 1100                |
| $k_{sy}$ | 2                   |
| $k_{sz}$ | 60                  |
| $k_{cs}$ | 3.3                 |

(全節点合計)

$$GAK \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial x} - \psi \right) - N \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \rho A \omega^2 (u + \theta_x z_0) = 0 \quad (2)$$

ここで、 $G$  ははりのせん断弾性係数、 $K$  は断面のせん断係数である。 $A$  は断面積、 $\rho$  は密度、 $E$  はヤング係数、 $I$  は断面二次モーメント、 $u$  は水平または鉛直方向のはりのたわみ、 $\psi$  は断面の回転角、 $\theta_x$  はレール軸回りの捩れ角であり、 $z_0$  ははり断面重心から捩れ中心までの距離であり、水平振動において考慮される。

軌道系をまくらぎにより離散支持された無限周期構造としてモデル化する。図1は、無限軌道のまくらぎ1区間(1ユニット)を表したものである。当該ユニットのレール・まくらぎについて、重み付き残差式に基づき式(2)等の運動方程式の弱定式化を行い、離散化すると、次式を得る。

$$[\bar{W}]^T [K - NC - \omega^2 M] \{U\} = [\bar{W}]^T \{F\} \quad (3)$$

$$[C] = \begin{bmatrix} -\int_0^l \frac{dN_i}{dx} \frac{dN_j}{dx} dx & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\{W\}$  は任意の仮想節点変位ベクトル、 $\{\bar{W}\}$  はその共役である。 $[K]$  はレールの剛性行列、 $[M]$  は質量行列、 $\{U\}$ 、 $\{F\}$  は節点変位・節点力ベクトル、 $N_i$ 、 $N_j$  はたわみ  $u$  の補間関数であり、3次 Hermite 多項式により与えられる。

## 3. 分散特性の解析

Floquet 原理<sup>4)</sup>より周期構造物における定常解は次の第2種周期性をもつ。

$$u_L = u_0 e^{-i\kappa L}, \quad \bar{f}_L = \bar{f}_0 e^{-i\kappa L} \quad (4)$$

ここで、 $L$  は周期長(まくらぎ間隔)、 $( )_0$ 、 $( )_L$  は1ユニット(図1)の手前と後方レール端における節点ベクトル、 $\kappa$  は Floquet 波数である。

Key Words: レール, 軸力, 振動

連絡先: 950-2181 新潟市西区五十嵐二の町 8050 番地 TEL 025 (262) 7028 FAX 025 (262) 7021

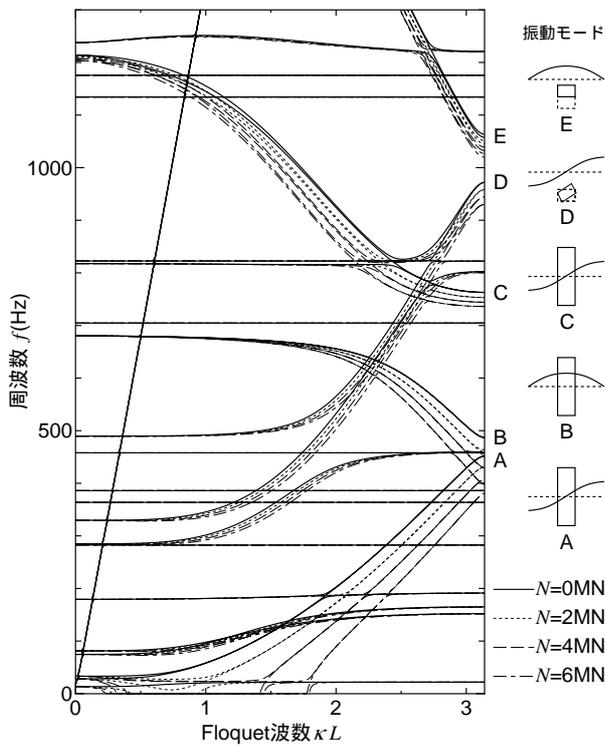


図2 周波数  $f$  と Floquet 波数  $\kappa$  と軸力  $N$  との関係

式 (4) を式 (3) に適用し  $u_L, \bar{w}_L$  を消去して次式を得る .

$$[K' - NC' - \omega^2 M']\{U'\} = 0 \quad (5)$$

ここで, (') は式 (4) の条件を課して行列を整理したため, もとの行列とは一致しないことを表している .

式 (3) における行列  $K, C, M$  は実対称行列であるので, 式 (5) の係数行列は Hermite 行列となる . さらに, 各行列の正定値性より, 固有振動数  $\omega$  および軸力  $N$  の値は実数値をとる . この固有値問題を解くことで, 円振動数  $\omega$  と Floquet 波数  $\kappa$  と軸力  $N$  との関係 (分散曲面) を求める .

#### 4. 解析条件

図 1 で示すように, バネで離散支持された無限長レールを軌道モデルとして考える . まくらぎ間隔は  $L=0.6\text{m}$  とし, レールは  $50\text{kgN}$  レール, まくらぎは PC まくらぎを想定している . 各バネ定数を表 1 に示す .

#### 5. 解析結果

周波数  $f$  と Floquet 波数  $\kappa$  と軸力  $N$  の関係は 3 次元空間中の曲面として表される . そこで, 軸力が  $0\text{N}$  から  $2\text{MN}$  ごとに増加したときの周波数  $f$  と Floquet 波数  $\kappa L$  の関係を表したものを図 2 に示す . なお, 図には各振動モードも合わせて示した . 図中の水平線は主にまくらぎが振動するモードである .

この図で,  $\kappa L = \pi$  における分散曲線の傾きが 0 になるモードの内, 軸力の影響が認められるものを A,B,C,D,E で分類する . これらの箇所は, レールを加振した際に大きく

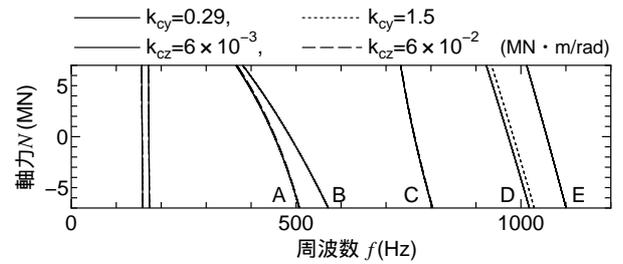


図3 締結装置の回転ばね定数の影響

応答し, 測定しやすいモードに相当するため, 軸力の測定にはこれらの振動モードを利用するのがよいと考えられる .

著者らは 1 次元モデルでの研究<sup>3)</sup>より, まくらぎ位置を節とするため, 締結装置のバネ定数やまくらぎの影響が少ないことから, 軸力測定に適する振動モードは水平たわみで A, 鉛直たわみで D であるとの結論を得た . この A,D の振動モードについて再検討していく .

#### (1) 締結装置等のバネ定数の影響

実際の軌道において, 締結装置やまくらぎ下パッドの剛性はある程度バラツキを有するものと考えられる . そこで, 締結装置等に関するバネ定数の違いが結果に及ぼす影響について調べた .

図 1 に示したバネ定数のうち, 唯一 A, D の振動モードに影響が認められた回転ばね定数  $k_{cy}, k_{cz}$  に関する結果を図 3 に示す . なお, まくらぎ剛体モデルの場合を示した . A~C の振動モードはまくらぎ振動を伴わないため, 本モデル変更の影響は全く受けない . D の振動モードは, まくらぎの振動を伴うため, 若干の差異が認められるものの, 傾向に本質的な違いはなかった .

A,D の振動モード共にその部分の回転量が大きくなる  $k_{cz}, k_{cy}$  の影響を受けることが確認できる .

#### 6. おわりに

A,D の振動モードが軸力測定には適していることを確認した . 特に水平振動モード A は本解析では締結装置等の剛性の影響を受けず, 感度も高いことから現時点では軸力測定に最適であると考えられる . 今後は現実の軌道系の不均一性が感度に及ぼす影響について検討していく .

#### 参考文献

- 1) 佐藤正男, 山本陽一: 軌道に敷設されたレールの軸力測定器の開発 (第一報), 鉄道技術研究所速報, No.82-12, 1982.1
- 2) 大宮孝夫 他: ロングレール内軸力に関する基礎的研究, 土木学会第 60 回年次学術講演概要集, IV-134, 267-268, 2005 .
- 3) 阿部和久, 清水紗希, 相川明, 紅霧一寛: 軸力を受けるレールの波動伝播解析, 計算数理工学論文集, Vol.9, No.13, 67-72, 2009 .
- 4) Delph, T.J., Herrmann, G. and Kaul, R.K.: Harmonic wave propagation in a periodically layered, infinite elastic body : Antiplane strain, *J.Appl. Mech.*, **45**, 343-349, 1978 .