

### 合成合理式の明示的な解の数学的導出

中央大学大学院 学生員 笹田 拓也  
中央大学大学院 正会員 渡辺 直樹

中央大学大学院 正会員 渡邊 暁人  
中央大学理工学部 フェロー会員 山田 正

**1. はじめに** 著者らは物理的な観点から降雨流出機構の解明を行うとともに流域特性や時空間スケールを問わず普遍的に適用可能な降雨流出モデルの構築を目指している。代表的な概念流出モデルのひとつとして挙げられる合成合理式の考え方は従来から提案されているものの、これまで明示的な基本式の形では示されてこなかった。本稿は単一斜面の降雨流出を表現する基本式から合理式・合成合理式が導出されることを示し、その基本式を示すものである。

#### 2. 単一斜面における降雨流出を表現する基本式の導出

##### 2-1. 運動則及び連続式

勾配  $i$  の流れ場から長さ方向に一様に非定常的に変化する降雨が与えられたときの斜面下端での流量時系列を考える。山田<sup>1)</sup>は浸透流について抵抗則および不等流の基礎方程式に関する理論展開より斜面流下方向に関する飽和側方流を支配する運動方程式としては(1)式が成立することを示している。(2)式は連続式である。

$$-i + \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{3f(1-\lambda)}{4d\lambda^3g}v^2 + \frac{1}{\lambda^2} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{v^2}{2g} \right) + \frac{1}{g\lambda} \frac{\partial v}{\partial t} \quad (1)$$

$$\lambda \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(hv)}{\partial x} = r_0(t) \cos \theta = r(t) \quad (2)$$

1)式の基本的な性質は土壌の空隙率  $\lambda$  が入ることと抵抗則(第3項)の形の違があるにしても通常の開水路流れを支配する運動方程式と本質的には変わらない。通常の浸透流で成立する1,2,3項 $\gg$ 4,5項の関係や、山地斜面などを考え(3)式の関係を用いて整理すると(1)(2)式から(4)式が得られる。ここで  $v'_0$  は真の流速  $= v_0 / \lambda$  )であり、また(3)式より  $v = v_0$  (Const.)としている。

##### 2-2. 流れの乱・層流を問わず成立する降雨流出系の基本式

$$i \gg \frac{\partial h}{\partial x} \quad (3), \quad \frac{\partial q}{\partial t} + v'_0 \frac{\partial q}{\partial x} - \frac{q}{2i\lambda} \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} = r(t)v'_0 \quad (4)$$

この(4)式が流れの乱・層流を問わず成立する降雨流出系の基本式となる。左辺第2項の流速  $v'_0$  で  $q$  が移流され (Kinematic Wave), 第3項によって非定常の拡散係数  $q/2i\lambda$  をもって  $q$  が拡散され、右辺第1項によって上から  $v'_0 r(t)$  の流入がある。よって、側方流入をもつ非線形移流拡散方程式となっている。一般に拡散係数の関数形はそれ程本質的に重要ではない場合が多いため  $q/2i\lambda$  は一定値  $q_0/2i\lambda$  を用いて代入し、 $q_0$  に関しては山田の実験結果<sup>1)</sup> により決定される。つまり(4)式のかわりに(5)式を用いる。(5)式と著者

ら<sup>1)</sup>が以前から提案している集中定数系方程式は、用いる抵抗則が異なる。この(5)式をある  $r(t)$  のもとで解くことにより降雨と流出の関係は明らかになる。

$$\frac{\partial q}{\partial t} + v'_0 \frac{\partial q}{\partial x} - \frac{q_0}{2i\lambda} \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} = r(t)v'_0 \quad (5)$$

#### 3. 降雨流出系を支配するパラメータ $Re$ と $Re$ の大小による流出波形の変化

3-1. 無次元化した降雨流出の基本式と  $Re$  に相当するパラメータ  
観測地点の原点からの距離  $L$  を長さの基準に、 $t_L = L/v'_0$  を時間の基準にとり(5)式を無次元化すると(6)式を得る。

$$\frac{\partial q_*}{\partial t_*} + \frac{\partial q_*}{\partial x_*} = \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 q_*}{\partial x_*^2} + r_*(t) \quad (6), \quad \frac{1}{Re} = \frac{q_0}{2i\lambda \cdot Lv'_0} \quad (7)$$

(6)式中の  $Re$  は移流真拡散数<sup>2)</sup>の形をしており、Navier-Stokes 方程式を無次元化したときに現れるレイノルズ数と物理的に同じ意味を持っている。(6)式より降雨流出系を支配するパラメータとして  $Re$  が唯一のパラメータであり、この値の大小によって斜面末端におけるハイドログラフの形状が左右される。 $Re > 100$  の場合ハイドログラフは移流真からの寄与が卓越し、 $1 < Re < 100$  の場合は移流真と拡散数<sup>2)</sup>の両者が寄与する。そして  $Re < 1$  の場合は拡散数<sup>2)</sup>からの寄与が卓越する。

##### 3-2. 降雨と流出の $Re$ 数に応じた変化

様々な  $Re$  数の条件で(5)式に対して数値積分を行い求めた結果をまとめたものを図-1に示す。降雨強度を一定にしたまま、降雨の継続時間  $t_r$  と到達時間  $t_L = L/v'_0$  との大小に応じて  $q(t, L)$  の変化の様子を示したものである。求めた結果より、 $Re$  数が大きい場合はその解は合理式を示し、小さい場合は応答関数が階級関数でありこれはタンクモデルの解であることがわかる。図-1のうちCase(a)は、特別な場合として  $Re \rightarrow \infty$  , つまり移流真のみが存在する場合を示しており(5)式は(8)式と表される。

$$\frac{\partial q}{\partial t} + v'_0 \frac{\partial q}{\partial x} = r(t)v'_0 \quad (8)$$

(8)式は双曲型の時間に関して1階の微分方程式である。次節に示すようにこの方程式の解は合理式を示しており、本理論より合理式は浸透流の流出のうち移流真が卓越した場合に相当するものであることが明らかになった。ここでは列としてLaplace変換法を用いて合理式を導出した解を次節に示す。またこの解を用いて合成合理式と呼

キーワード 降雨流出, 合理式, 合成合理式, 流出モデル, 物理過程  
連絡先: 〒112-8551 東京都文京区春日 1-13-27 中央大学大学院 理工学研究科 TEL03 - 3817 - 1805

ばれる手法の明示的な解を導出する。

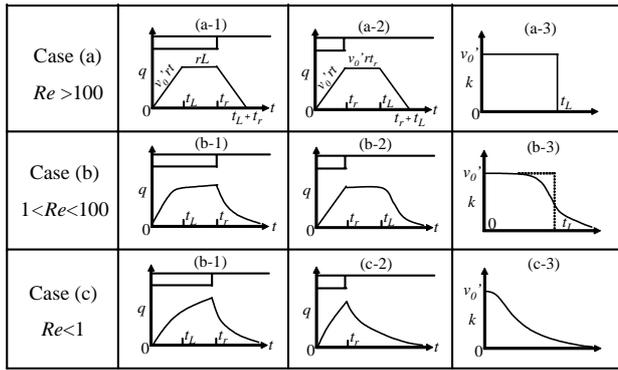


図-1 降雨と流出の Re 数に応じた変化

4. 降雨流出の基本式からの合理式の導出

初期条件・境界条件は以下のように与える。(9)式のように単位幅流量の初期条件は零として考える。境界条件として(10)式のように UnitStep 関数の組み合わせで表した降雨開始時間  $t_n$ 、降雨強度  $r_{ave}$ 、降雨継続時間  $t_r$  の任意の降雨  $r(t)$  を与える。一般に我々が得る事のできる降雨データはすべて棒グラフ状に表せる時間方向に離散化されたデータであり、(12)式の降雨はある降雨データから任意時刻の部分を取り出したものに等しい。

$$q(x,0) = 0 \quad (9)$$

$$r(t) = r_n(t) = r_n^{ave} \{U(t - t_n) - U(t - (t_n + t_r))\} \quad (10)$$

(9),(10)式のもとで(8)式を Laplace 変換法を用いて解いた解が(11)式である。ここに  $L$ : 斜面長[m],  $L_r$ : 河道長[m],  $H$ : ヘヴィサイドのステップ関数である。

$$q(t) = q_n(t) = r_n^{ave} v \left\{ \begin{aligned} & \left\{ (t-t_n)H[t-t_n] - (t-(t_n+t_r))H[t-(t_n+t_r)] \right\} - \\ & \left\{ (t-t_n - \frac{x}{v})H[t-t_n - \frac{x}{v}] - (t-(t_n+t_r) - \frac{x}{v})H[t-(t_n+t_r) - \frac{x}{v}] \right\} \end{aligned} \right\} \dots(11)$$

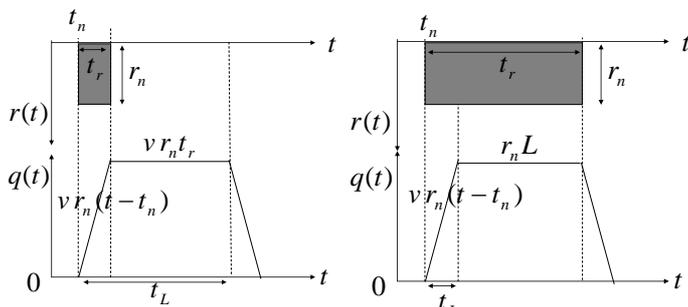


図-2  $t_r > t_L$  の Case

図-3  $t_r > t_L$  の Case

図-3 及び図-4 に示すように、この解は洪水到達時間  $t_L = L/v$  と降雨継続時間  $t_r$  の大小関係で二つのケースに分類される。 $q$  を流量  $Q$  に書き直した(13)式より、この解は合理式そのものを示していることがわかる。流出率は降雨として有効降雨をとった際に内包される。

$$Q = q \cdot L_r = L_r \cdot v (t - t_n) \cdot r^{ave} = L_r \cdot L \cdot r^{ave} \quad (12)$$

流域面積  $A$  に相当 流下時間平均降雨に相当

5. 合成合理式概念とその明示的な解

任意の降雨データは(13)式のように各時刻に対応する(10)式を時刻を考慮して重ね合わせたもので表現される。このような降雨データに対するハイドログラフは降雨データの各時刻の部分に対する流出を表す(11)式を時刻を考慮して重ね合わせることで表現でき(14)式のように表される。これが合成合理式と呼ばれる手法であり、(14)式は合成合理式を明示的な式の形で表現したものである。

$$r(t) = r_1(t) + r_2(t) + \dots + r_{rtime}(t) = \sum_{n=1}^{rtime} r_n(t) \quad (13)$$

$$q(t) = q_1(t) + q_2(t) + \dots + q_{rtime}(t) = \sum_{n=1}^{rtime} q_n(t) \quad (14)$$

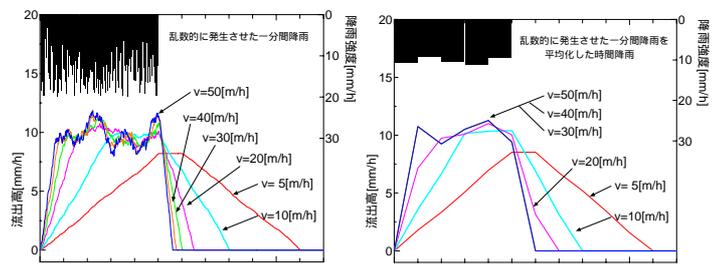


図-4 乱数的に発生させた降雨を与えた計算結果

ここで特筆すべきは降雨を(10),(13)式のように実際の降雨データの形式である UnitStep 関数の組み合わせで表現しているため、時間間隔を与えさえすれば任意の時系列降雨データをそのまま用いて計算できるということである。また解である(14)式も降雨と同様に UnitStep 関数の組み合わせで表されることが興味深い。得られた合成合理式を用いた計算の一例として乱数的に発生させた降雨を与えた場合の結果を図 4 に示す。与えた降雨のばらつきの度合いに対し、合成合理式の応答が示すばらつきの度合いは軽減されていることがわかる。

6. まとめ 本論文で得られた知見を以下に示す。

- 合理式、合成合理式は、斜面流下方向流れの基本式のうち移流項が卓越し、断面平均流速  $v$  が水深によらない飽和ダルシー則をとる場合に相当する。
- Laplace 変換を用いることで合成合理式の解を明示的な式の形で示した。得られた合理式・合成合理式により表現される降雨流出は降雨データと同様に UnitStep 関数を組合わせた形で表される。
- 乱数的に発生させた仮想的な降雨に対し計算を行った。ハイドログラフピーク時のばらつきは与えた降雨のばらつきと比べ軽減されている。

参考文献

- 1) 山田正, 中沢均, 吉川秀夫: 浸透剤に関する水理学的研究, , , 東京工業大学・土木工学科研究報告, No.25, 1972.
- 2) 呉修一, 山田正: 既述概念流出モデルの理論的導出, 水文・水資源学会誌, Vol.22, No.5, 2009年9月号