

## フーリエ級数展開を用いた砂州の非線形解析

北海道大学 学生会員 青木章宜  
北海道大学 正会員 泉 典洋

移動床流路では流れの水理学条件等により、さまざまな河床波が形成される。河床波には、duneなどの縦断方向のみに波状形状を形成する小規模河床形態、交互砂州、複列砂州、網状河川などの河川の横断方向にも波状の形状を持つ河床形態である中規模河床形態がある。

河道内の流れは一般に河床の形状に大きく影響を受けるが、特に中規模河床形態が形成されると、流れが蛇行し、河岸の特定の所に流れの集中した場所が現れる。その流れの集中は、河岸を侵食し流路そのものを蛇行させるひきがねとなる。流路の蛇行そのものは適切な対応がとれるもしくはとれている状況下なら問題はない。しかし、適切な対応がとれない状況になると、流路蛇行は直接災害につながる。安全でかつ合理的な治水対策を行うためには流れの集中の原因となる中規模河床形態の形状、蛇行している流れの状態を知る必要がある。

本研究では平衡状態の流速、波高、河床高さを、フーリエ級数展開を用いて算出する。その際、方程式系を非線形で表し、実河川や実験値により近い値が算出されるようにした。

固定壁と移動床をもつ幅  $B^*$  の広幅矩形直線水路に流れが存在する状況(図1参照)を考え、支配方程式として運動方程式及び連続の式を浅水流近似し、水深方向に積分した浅水流方程式を無次元化したものを用いた。そしてその無次元化された浅水流方程式と細砂や微粒子の影響を排除した流砂の連続式を無次元化したものを基礎方程式としている。また、 $\xi = x - ct$  で表される移動座標系を導入することで、時間項を  $\xi$  に含めた形にできるため、時間項の影響がない平衡状態を表せるようにした。時間項の影響を排除した基礎方程式は次のようになる。

$$U \frac{\partial U}{\partial \xi} + V \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{1}{F_0^2} \left( \frac{\partial D}{\partial \xi} + \frac{\partial Z}{\partial \xi} \right) - \beta C_f + \beta C_f \frac{(U^2 + V^2)^{\frac{1}{2}} U}{D} = 0 \quad (1)$$

$$U \frac{\partial V}{\partial \xi} + V \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{1}{F_0^2} \left( \frac{\partial D}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial y} \right) + \beta C_f \frac{(U^2 + V^2)^{\frac{1}{2}} V}{D} = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial UD}{\partial \xi} + \frac{\partial UD}{\partial y} = 0 \quad (3)$$

$$-c \frac{\partial Z}{\partial \xi} + \frac{\partial Q_{bx}}{\partial \xi} + \frac{\partial Q_{by}}{\partial y} = 0 \quad (4)$$

ここで  $\xi$  および  $y$  はそれぞれ底面に沿った流下方向および横断方向の座標、 $U$  および  $V$  はそれぞれ無次元化された流速の  $\xi$  および  $y$  方向成分、 $D$  は無次元化された水深、 $Z$  は無次元化された河床高さ、 $Q_{bx}$  および  $Q_{by}$  はそれぞれ掃流される礫の単位幅あたりの流量の  $\xi$  および  $y$  方向成分を無次元化したもの、 $F_0$  はフルード数、 $C_f$  は抵抗係数、 $\beta$  はアスペクト比である。

本研究ではフーリエ級数展開として以下のものを用いた。

$$U = u_0 + \sum_{n=1}^N (u_n^{sx} \sin n\alpha\xi + u_n^{cx} \cos n\alpha\xi) \cos n\pi y \quad (5)$$

$$V = \sum_{n=1}^N (v_n^{sx} \sin n\alpha\xi + v_n^{cx} \cos n\alpha\xi) \sin n\pi y \quad (6)$$

キーワード 砂州 フーリエ級数展開 ガレルキン法

連絡先 北海道大学 工学部 環境フィールド工学専攻 河川流域工学研究室

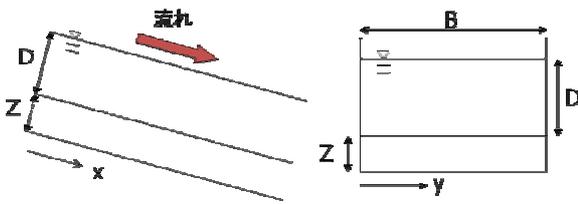


図1 座標系と変数の定義

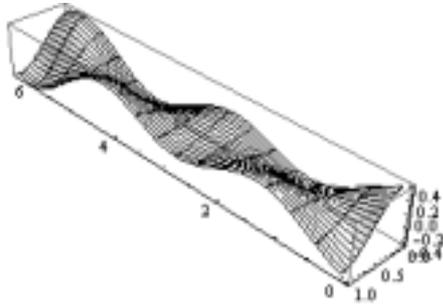


図2 算出された平衡解

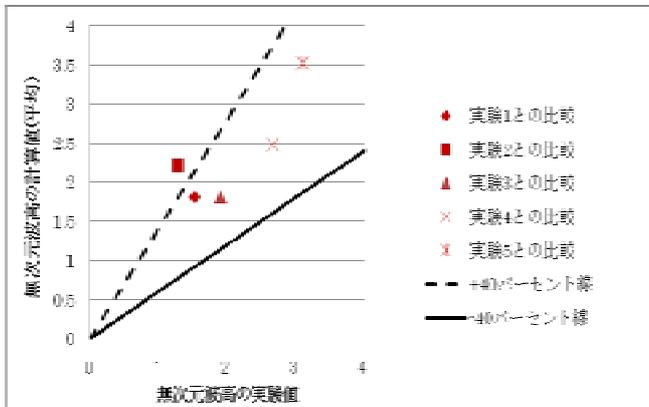


図3 無次元波高の理論値と実験値との比較

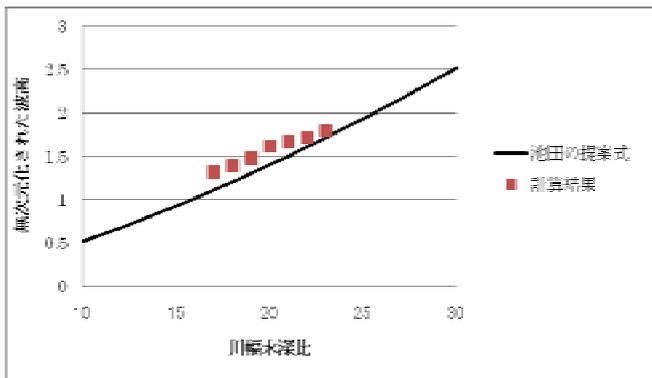


図4 無次元波高の理論値と池田の提案式との比較

$$D = d_0 + \sum_{n=1}^N (d_n^{sx} \sin n\alpha\xi + d_n^{cx} \cos n\alpha\xi) \cos \pi y \quad (7)$$

$$Z = \sum_{n=1}^N z_n^{cx} \cos n\alpha\xi \cos \pi y \quad (8)$$

展開係数と移送速度のみの連立方程式を解くことで平衡解を求めているが、その際近似解法として Galerkin 法を用いて基礎方程式を展開係数と移送速度のみの連立方程式に変形させている。そしてその連立方程式を解くことで平衡解を算出した。算出された平衡解の一例を図2として載せる。

本研究では解析結果を二つの指標で実験値と比較している。平衡波高の理論値と実験値との比較を行ったところ(図3参照)誤差40%線内にほとんどのプロットが存在し、理論値と実験値とでよい一致を示しているといえる。また、実験式である池田の提案式との比較を行ったところ(図4参照)、池田の提案式近傍に計算で求められた値がプロットされ、実験式ともよい一致を示した。

参考文献

- Izumi,N. and Pornprommin,A.: Weakly nonlinear analysis of bars with the use of the amplitude expansion method,2002.
- Colombini, M., Seminara, G. and Tubino, M.:Finite amplitude alternate bars, 1987.
- 長谷川和義：蛇行流路における流れと平行底面形状に関する研究、1983 .
- 福岡捷二：交互砂州と流路変動
- Izumi,N.and Paker,G.:Upstream Driven Channel Inception due to Surface Erosion,1994
- 黒木幹男：中規模河床形態の領域区分に関する理論的研究、1984 .
- Hall,P.:Nonlinear evolution equations and the braiding of weakly transporting flows over gravel beds,2005.
- 洪水の水理と河道の設計法: 治水と環境の調和した川づくり 福岡捷二 著