

波動と振動の簡易な連成解析

東洋大学 正会員 ○鈴木 崇伸

1. はじめに

地震応答解析において地盤震動は地震波が通過していく現象と構造物が振動する現象のインタフェースといえる。最近では有限要素法を用いて地盤－構造物の一体解析が行われるようになったが、1次元の波動方程式と1自由度の振動方程式を組み合わせる解析解を求め、両者の連成関係の分析を行った結果を報告する。

2. 波動方程式と1自由度振動系の組み合わせ

波動方程式は1次元とし、振動方程式は1自由度のもっとも簡単なモデルを用いる。図に計算モデルのイメージを示す。波動が伝わる空間の1点に振動子を取りつけている。1自由度を多自由度に置き換えることも可能である。波動方程式と振動方程式が連成する運動方程式は次の3式となる。

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad m\ddot{y} + c\dot{y} + k(y - u_N) = 0, \quad \rho c^2 A \frac{\partial u}{\partial x}(x_N) = k(y - u(x_N)) \quad (1)$$

振動方程式は変位を y として、 $x=x_N$ を自由境界として地表に固定されたある構造物をイメージしている。振動方程式の外力項は、固定した点の変位である。構造物の変位 y は絶対座標系にとってあり、相対変位を y_r として $y = y_r + u_N$ と置き換えれば、支点加速度の強制振動と同じになる。3番目の式は固定点の力のつり合いとなる。構造物の反力と波動方程式の応力のつり合い条件を考えると単位が $[m^2]$ だけ違っている。両者の単位を合わせるため面積の次元をもつ係数 A を導入している。3番目が波動と振動を結合する条件式となる。係数 A は構造物の振動反力を受け止める面積と考えられる。波動方程式から入射波と反射波の波動関数が決まり、残りの2式から1自由度系の応答と入射波と反射波の比率が決定できる。計算結果として、入射波の振幅を1としたときの1自由度系の応答と固定点の周波数応答を示す。ここに固有振動数を n として $c=2hmn$, $k=mn^2$ の関係がある。ただし式中の I は虚数単位を示している。入力波のフーリエスペクトルを与えれば応答変位を計算できる。

$$K_s = \frac{2}{1 + 2h\left(\frac{\omega}{n}\right)I - \left(\frac{\omega}{n}\right)^2 + \frac{mn}{\rho c A}\left(2h + \left(\frac{\omega}{n}\right)I\right)}, \quad U_s = K_s \left\{ 1 + 2h\left(\frac{\omega}{n}\right)I - \left(\frac{\omega}{n}\right)^2 \right\} \quad (2)$$

波動場と振動系が連成することにより、みかけの固有振動数は小さくなり、みかけの減衰は増大する。地盤－構造物の相互作用の影響を調べるのに上記の解析解は有効である。

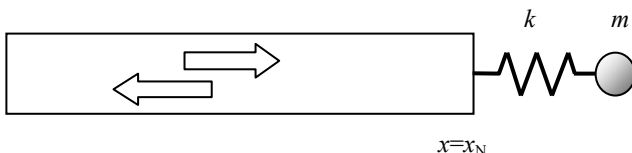


図-1 モデル図1

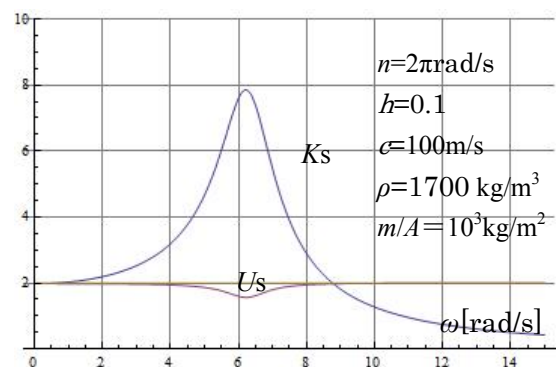


図-2 周波数応答

3. 2点で固定された1自由度振動系

次に2点で支持される振動子を波動が伝わる空間に固定する。2点をI点、J点とする。波動方程式は省略して、自由度の振動方程式と境界条件は次のようになる。バネ係数は直列バネとして、2点に半分ずつ分配される形となり、質点は2固定点の平均変位を受ける振動をする。接地面積を先ほどの問題と同様に A として波動場の応力と反

キーワード：波動と振動の連成解析，地盤と構造物の相互作用，位相差入力の問題

連絡先：350-8585 埼玉県川越市鯨井 2100 東洋大学理工学部都市環境デザイン学科

力のつり合いとしている。振動系との接合点において、ばねによる反力分だけ波動場の応力が変化する。

$$m\ddot{y} + c\dot{y} + k\left(y - \frac{u_I + u_J}{2}\right) = 0, \quad \Delta\sigma_I A = \frac{k}{2}(y - u_I), \quad \Delta\sigma_J A = \frac{k}{2}(y - u_J) \quad (3)$$

振動系の運動の影響により波動場は3種類に分かれる。振動系の存在しない左右の領域と、振動系の接合点に囲まれた領域となる。\$A_1=1\$ として波動項の係数4個と1自由度系の応答を未知数として方程式を解く。接合点における変位の連続、応力のつり合いと振動方程式から条件式が5個となる。\$L\$ だけ離れた2点で位相差入力を受ける振動系の応答の計算式 \$Ks\$ は以下となる。振動系の質量と固有振動数、波動場の波速と単位質量と、反力を受ける面積によって応答が変化する式となっている。また2点の間の変位 \$Us\$ と2点の相対変位 \$\Delta U\$ の計算式も示す。\$\omega=n\$ が共振条件となるが、2点の距離 \$L\$ によって応答が変わる。

$$Ks = \frac{1 + \cos \frac{\omega L}{c} + I \sin \frac{\omega L}{c}}{2 \left(1 - \left(\frac{\omega}{n} \right)^2 + 2Ih \left(\frac{\omega}{n} \right) \right) \left(\cos \frac{\omega L}{c} + I \sin \frac{\omega L}{c} \right) - \frac{mn}{2\rho c A} \left(2h + \left(\frac{\omega}{n} \right) I \right) \left(1 + \cos \frac{\omega L}{c} + I \sin \frac{\omega L}{c} \right)}$$

$$Us = Ks \left(1 - \left(\frac{\omega}{n} \right)^2 + 2Ih \left(\frac{\omega}{n} \right) \right), \quad \Delta U = \frac{1 - \cos \frac{\omega L}{c} + I \sin \frac{\omega L}{c}}{1 - \left(1 + \frac{mn^2}{4\rho c A \omega} \right) \left(1 - \cos \frac{\omega L}{c} + I \sin \frac{\omega L}{c} \right)} \quad (4)$$

計算例を示す。固有振動数を \$2\pi\$ rad/s, 減衰定数を 0.1 とし、2点間の距離を変化させて周波数応答がどのように変化するか調べる。波の速さは 100m/s, \$m/A=1000\$ kg/m\$^2\$ は一定とする。固有周期に相当する波長は 100m となる。質点系の最大応答は支点距離 \$L\$ によって変化する。支点距離が1波長に相当する時には支点の相対変位が0となり、振幅が最大になる。逆に支点距離が半波長に相当する場合には、相対変位が2となり、逆位相の支点変位となるため中間での応答は0となる。位相差入力の影響を調べるのに解析解が有効である。

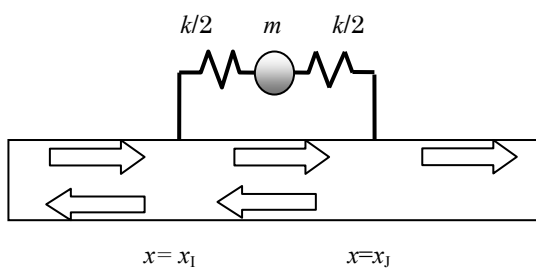


図-3 モデル図2

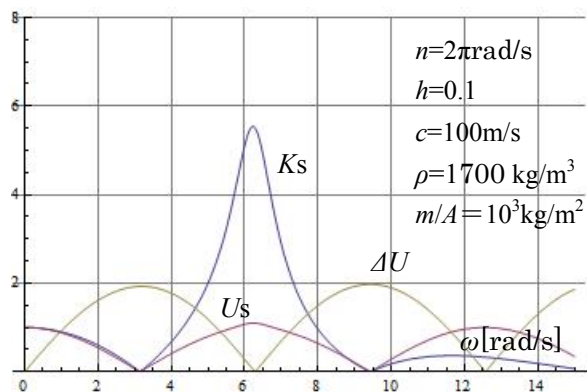


図-4(a) 周波数応答 (\$L=100\$ m)

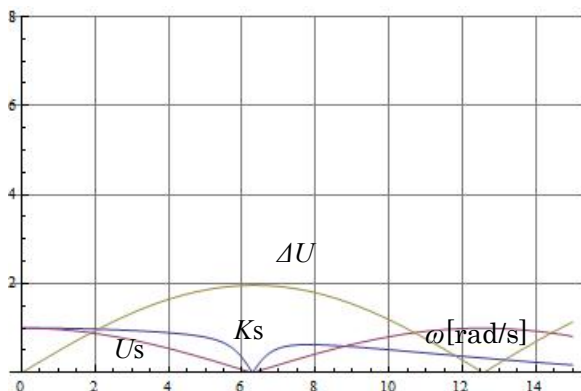


図-4(b) 周波数応答 (\$L=50\$ m)

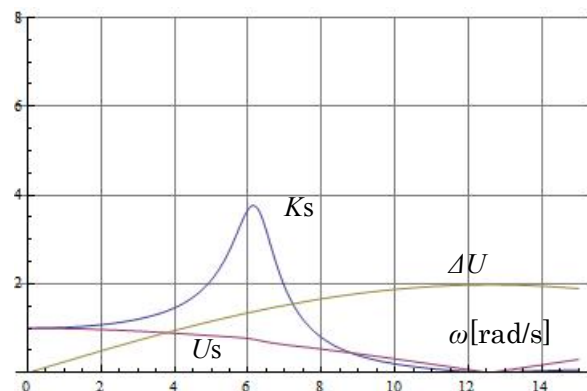


図-4(c) 周波数応答 (\$L=25\$ m)