

表面せん断応力が作用する厚板の三次元曲げ解析

足利工業大学 正 会 員 ○ 末武 義崇

1. まえがき

厚板の曲げ解析における古典理論として著名な、Reissner 理論および Mindlin 理論が提案されて以来、横せん断変形の影響を考慮した多くの平板理論が報告されている。筆者も、板の横荷重に占める物体力および表面力を明確に区別し、比較的低次の変位場を用いた簡明な平板理論を構築してきた^{1), 2)}。一方、従来の平板理論の多くは、荷重として横荷重のみを想定しており、板上下面に表面せん断応力が作用した場合の解析例を示した研究は極めて少ない。これに対し、筆者は、板上下面におけるせん断応力の境界条件をあらかじめ満足するような変位場を導入し、既往の平板理論²⁾の再定式化を行った³⁾。そして、新たに定式化した平板理論を用いて、横荷重と同時に表面せん断応力の作用を受ける厚板の曲げ解析を実施し、変位や応力の板厚方向分布について、定性的に妥当な解が得られることを示した³⁾。しかしながら、解の妥当性については、定量的な検討が必ずしも充分ではなく、課題が残されているのが現状である。

そこで本研究では、横荷重と共に表面せん断応力が作用する平板の三次元弾性解析を実施し、平板理論の妥当性を検証する際の基準となり得る解析結果を確保することとした。数値計算に当たっては、周辺単純支持された矩形平板を解析対象とし、面内変位や横せん断応力の板厚方向分布に関する解析結果を求めた。その際、解の数値的な収束性に関する検討も行った。

2. 表面せん断応力を考慮した Fourier 解析

本研究では、厚板の三次元曲げ解析を実施するに当たり、支配方程式として Navier の式を用いた。また、図 1 に示したように、周辺単純支持された矩形平板を想定し、幾何学的境界条件を満足する (x, y, z) 3 方向の変位 (U, V, W) の表示として、次の三角級数を仮定した。

$$\left. \begin{aligned} U(x, y, z) &= \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M \{ U_{mn}(z) \cos \lambda_m x \sin \mu_n y + \underline{U_{mn}^{(P)}(z) \sin \lambda_m x \sin \mu_n y} \} \\ V(x, y, z) &= \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M \{ V_{mn}(z) \sin \lambda_m x \cos \mu_n y + \underline{V_{mn}^{(P)}(z) \sin \lambda_m x \sin \mu_n y} \} \\ W(x, y, z) &= \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M W_{mn}(z) \sin \lambda_m x \sin \mu_n y \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

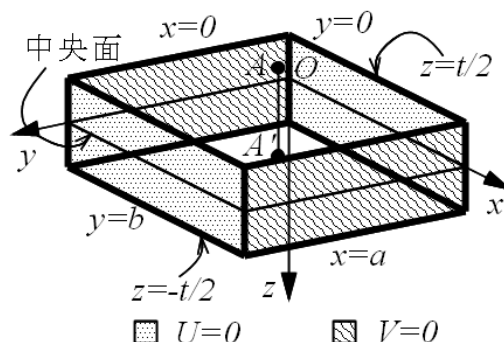


図 1. 周辺単純支持された矩形平板

ただし、 $\lambda_m = m\pi/a$ および $\mu_n = n\pi/b$ と置いた。式 (1) において、下線部の $\underline{U_{mn}^{(P)}(z)}$ および $\underline{V_{mn}^{(P)}(z)}$ に関する部分は、表面せん断応力に関わる力学的境界条件に対応した特殊解である。式 (1) の下線部は、二重正弦級数で表現されているため、周辺単純支持の幾何学的境界条件を乱すことはない。

式 (1) を支配方程式である Navier の式に代入すれば、5 つの未定関数 $U_{mn}(z)$ 、 $V_{mn}(z)$ 、 $W_{mn}(z)$ 、 $\underline{U_{mn}^{(P)}(z)}$ および $\underline{V_{mn}^{(P)}(z)}$ に関する常微分方程式が得られる。このうち、未定関数 $U_{mn}(z)$ 、 $V_{mn}(z)$ および $W_{mn}(z)$ については、一般解として 6 個の任意定数を含む形の解を誘導する。一方、 $\underline{U_{mn}^{(P)}(z)}$ および $\underline{V_{mn}^{(P)}(z)}$ については、特殊解として、表面せん断応力に関する力学的境界条件を満たすように解の形を定めることにする。一般解の任意定数については、板上下面における垂直応力と表面せん断応力に関する力学的境界条件を適用することで、決定方程式が得られる。その際、垂直応力に関する力学的境界条件の適用に当たっては、二重級数の基底が共に正弦の部分と、正弦と余弦の組み合わせになっている部分とがあり、単純な係数比較ができない。本研究では、Galerkin 法を用いることでこの問題を回避した。

キーワード: 厚板, 三次元弾性解析, 表面せん断力, 面内変形挙動, 板厚方向応力分布

〒326-8558 足利市大前町 268-1 足利工業大学 都市環境工学科 TEL: 0284-62-0605 FAX: 0284-64-1061

3. 解析モデル

本研究で解析対象とした周辺単純支持矩形平板と設定した座標系は、図1に示したとおりである。解析モデルの形状は正方形とし、幅厚比 $\theta = t/a$ を $\theta = 0.01, 0.2, 0.5$ の3通りに変化させて解析を行った。材料定数については、Poisson 比を $\nu = 0.3$ とした。横荷重については、板上面 ($z = -t/2$) にのみ全面等分布荷重が作用した場合と、物体力のみが作用した場合の2通りを考えた。横荷重の大きさについては、無次元化荷重 $\bar{p}^* = \{(1-2\nu)/2G\}\bar{p}$ の値で $\bar{p} = 1.0$ とした。表面せん断応力については、板上面全体に等分布する x 方向のせん断応力と考え、横荷重との比を $\bar{q}_t/\bar{p} = \pm 0.5$ とした。数値計算に当たっては、図1に示した板厚方向の線分 $AA'(x = a/4, y = b/4)$ に沿った面内変位分布および横せん断応力分布を求めた。同時に、式(1)における級数の項数を $M = N = 30, 50, 100, 300, 500$ の5通りに変化させて解析を行い、解が数値的に収束するかどうかについても確認を行った。

4. 数値計算結果

解析結果の一部を図2～図4に示す。いずれも幅厚比 $\theta = 0.5$ の結果を示した。図2は、級数の項数を変化させたときの、図1の線分 AA' に沿った面内変位 U の誤差分布を表している。横荷重として表面力のみ、表面せん断応力 $\bar{q}_t/\bar{p} = 0.5$ の場合の結果である。図は、縦軸に無次元化座標 $\zeta = z/t$ を、横軸に項数 $M = N = 500$ の結果を基準としたときの誤差をとって示した。図から明らかなように、級数の項数が増加するにつれて、誤差がほぼゼロに近づいており、数値的な解の収束傾向が認められる。他の解析モデルについても、同様の収束傾向が見られる。

図3には面内変位、図4には横せん断応力の板厚方向分布をそれぞれ図示した。両図とも、縦軸に無次元化座標 $\zeta = z/t$ をとり、横軸については、図3では無次元化変位 $\alpha = u/a$ 、図4では無次元化せん断応力 $\tau^* = \{(1-2\nu)/2G\}\tau_{xz}$ をそれぞれとって示した。図の上下が板の上下面にそれぞれ対応している。図中、荷重比 $\bar{q}_t/\bar{p} = 0$ の場合を丸、荷重比 $\bar{q}_t/\bar{p} = 0.5$ の場合を三角、荷重比 $\bar{q}_t/\bar{p} = -0.5$ の場合を四角のプロットでそれぞれ示した。いずれも横荷重として物体力のみが作用した場合の結果である。

図3から明らかなように、上面に作用する表面せん断応力によって、面内変位分布が表面せん断応力の方向に移動している様子が見られる。また、図4に示した横せん断応力の分布についても、表面せん断応力によるズレが認められる。

5. まとめ

表面せん断応力が作用する厚肉矩形平板の三次元曲げ解析を実施し、数値的に収束傾向を示す解を求めることができた。幅厚比の異なるモデルの結果については講演会当日に示す。今後は、平板理論²⁾に基づく解析結果との比較を行う予定である。

参考文献: 1)・2)末武, 応用力学論文集, Vol.8, No.1, pp.25-32, 2005; Vol.10, No.1, pp.47-57, 2007.; 3)末武, 第64回土木学会年次学術講演会, I-630, 2009.

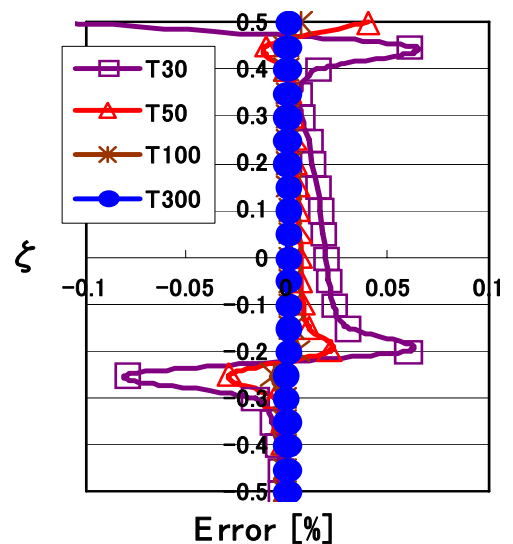


図2. 面内変位 U の誤差分布

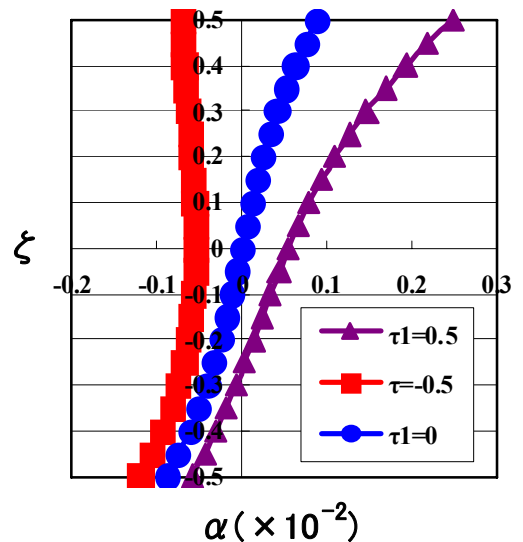


図3. 面内変位の板厚方向分布

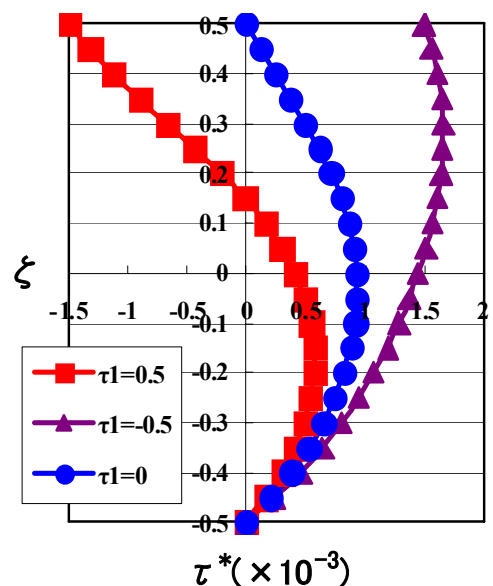


図4. 横せん断応力の板厚方向分布