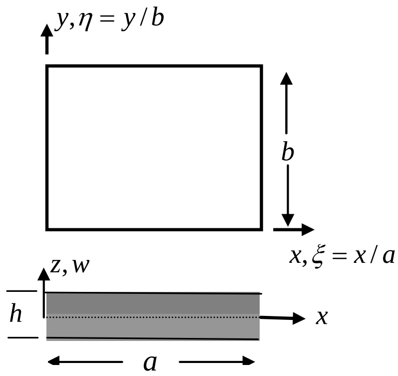
Spline Ritz 法を用いた傾斜機能平板の振動解析

大同大学　正員　水澤富作　大分高専　正員　名木野晴暢　大同大学大学院　学生員　戸田智規

1. はじめに　傾斜機能材料（functionally graded materials:FGMs）は，２種類以上の材料を連続的に傾斜機能させた複合材料であり，耐熱性や耐腐食性に優れ，力学的にも残留応力や応力集中の低減が期待される比較的新しい材料である [1)]．航空宇宙の分野で開発された傾斜機能材料は，傾斜機能設計の自由度が高いので，ジェットタービンから人工骨など広い分野への応用が期待されている．弾性係数や密度を厚さ方向に傾斜機能させた平板解析では，中立面の移動を伴うので，面内挙動と面外挙動の連成を考慮する必要がある．また，熱応力問題を対象とした研究と比較して，傾斜機能平板の応力解析や振動解析に関する研究例は，少ないように思われる [1)]．



図－1　傾斜機能平板と座標系

本論文では，3 次せん断変形理論に基づく spline Ritz 法を定式化し，セラミックスと金属の弾性係数と密度を板厚方向にベキ乗式で傾斜機能させた平板の振動解析を行い，本手法の解析精度について検討する．また，傾斜機能平板の振動特性に与える傾斜機能係数，幅厚比や面内拘束の影響についても明らかにする．

2. 定式化　3 次せん断変形理論(Reddy板理論)で仮定される変位関数U,V,Wは，直交座標系(x,y,z)で表せば，それぞれ次式で与えられる [2)]．

$$U(x,y,z)=u(x,y)+z\phi_x(x,y)-(4/3)(z^3/h^2)(\phi_x(x,y)+\partial w/\partial x)$$

$$V(x,y,z)=v(x,y)+z\phi_y(x,y)-(4/3)(z^3/h^2)(\phi_y(x,y)+\partial w/\partial y)\quad ,\ W(x,y,z)=w(x,y) \tag{1}$$

ただし，u,v,w　は，それぞれ面内変位とたわみであり，ϕ_x,ϕ_y は y 軸回りと x 軸回りの回転角である．

長方形平板は一様厚さ h で，ヤング係数 $E(z)$，せん断弾性係数 $G(z)$ およびポアソン比 $\nu(z)$ を厚さ方向へ傾斜させるように仮定すると，応力とひずみの関係式は，それぞれ次式で与えられる．

$$\sigma_x=\frac{E(z)}{1-\nu(z)^2}\varepsilon_x+\frac{\nu(z)E(z)}{1-\nu(z)^2}\varepsilon_y=\frac{E(z)}{1-\nu(z)^2}\left[\frac{\partial u}{\partial x}+z\frac{\partial\phi_x}{\partial x}-\frac{4}{3}\frac{z^3}{h^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial\phi_x}{\partial x}\right)\right]+\frac{\nu(z)E(z)}{1-\nu(z)^2}\left[\frac{\partial v}{\partial y}+z\frac{\partial\phi_y}{\partial y}-\frac{4}{3}\frac{z^3}{h^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{\partial\phi_y}{\partial y}\right)\right]$$

$$\sigma_y=\frac{\nu(z)E(z)}{1-\nu(z)^2}\varepsilon_x+\frac{E(z)}{1-\nu(z)^2}\varepsilon_y=\frac{\nu(z)E(z)}{1-\nu(z)^2}\left[\frac{\partial u}{\partial x}+z\frac{\partial\phi_x}{\partial x}-\frac{4}{3}\frac{z^3}{h^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial\phi_x}{\partial x}\right)\right]+\frac{E(z)}{1-\nu(z)^2}\left[\frac{\partial v}{\partial y}+z\frac{\partial\phi_y}{\partial y}-\frac{4}{3}\frac{z^3}{h^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{\partial\phi_y}{\partial y}\right)\right]$$

$$\tau_{yz}=G(z)\gamma_{yz}=G(z)\left[\frac{\partial w}{\partial y}+\phi_y-\frac{4z^2}{h^2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}+\phi_y\right)\right],\quad \tau_{xz}=G(z)\left[\frac{\partial w}{\partial x}+\phi_x-\frac{4z^2}{h^2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\phi_x\right)\right]$$

$$\tau_{xy}=G(z)\left[\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}+z\left(\frac{\partial\phi_y}{\partial x}+\frac{\partial\phi_x}{\partial y}\right)-\frac{4z^3}{3h^2}\left(\frac{\partial\phi_y}{\partial x}+\frac{\partial\phi_x}{\partial y}+2\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)\right]\quad ,G(z)=\frac{E(z)}{2\left[1+\nu(z)\right]} \tag{2}$$

厚さ方向に連続的に変化させる $E(z)$，$\nu(z)$ と密度 $\rho(z)$ は，それぞれベキ乗式(power-law form)で表せば，

$$E(z)=(E_m-E_c)\left(\frac{z}{h}+\frac{1}{2}\right)^p+E_c,\nu(z)=(\nu_m-\nu_c)\left(\frac{z}{h}+\frac{1}{2}\right)^p+\nu_c,\rho(z)=(\rho_m-\rho_c)\left(\frac{z}{h}+\frac{1}{2}\right)^p+\rho_c \tag{3}$$

で与えられる．ここで，p は厚さ方向の材料組成の分布を表す正の値をとるパラメータ(power-law exponent)を示し，m と c は，材料組成であるメタルとセラミックスを示し，$E(z=-h/2)=E_c,E(z=h/2)=E_m$ で表す．

Spline Ritz 法の定式化では，式(1)に表れる独立した５つの変位関数 $u,v,w,\ \phi_x,\phi_y$ は，それぞれ２方向に B-spline 関数で仮定する．

傾斜機能平板のひずみエネルギー U と運動エネルギー T は，それぞれ次式で与えられる．

キーワード　傾斜機能平板，spline Ritz 法，自由振動解析，３次せん断変形板理論，power-law form
〒457-8532　名古屋市南区白水町 40　都市環境デザイン学科　電話 052-612-5571

$$U=\frac{1}{2}\int_0^a\int_0^b\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}(\sigma_x\varepsilon_x+\sigma_y\varepsilon_y+\tau_{yz}\gamma_{yz}+\tau_{xz}\gamma_{xz}+\tau_{xy}\gamma_{xy})dxdydz \quad ,T=\frac{\omega^2}{2}\int_0^a\int_0^b\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\rho(z)(U^2+V^2+W^2)dxdydz \tag{4}$$

ここで，a,bは，それぞれ長方形板の長さと幅であり，ωは円振動数である．なお，式(4)で，zの関数で表される弾性係数等の値は，Gauss 積分により求めている．

したがって，spline Ritz 法を適用して，調和振動を仮定した傾斜機能平板の汎関数（$\prod=U-T$）を最小化すれば，固有方程式が求められるので，この方程式の固有値計算より，振動数と振動モードが求められる．

3. 数値計算例および考察 ここでは，セラミックスと金属の弾性係数と密度を板厚方向にベキ乗式で傾斜機能させた平板の自由振動解析を行い，本手法の解析精度について検討する．また，傾斜機能平板の振動特性に与える傾斜機能係数p，幅厚比a/hなどの影響につい示す．数値計算に用いる材料と材料特性値は，以下のように仮定する [3)]．Metal(Aluminum): $E_m=70\times10^9 N/m^2, \nu_m=0.3, \rho_m=2702kg/m^3$,Ceramic(Zirconia): $E_c=151\times10^9 N/m^2, \nu_c=0.3, \rho_c=3000kg/m^3$．なお，振動数パラメータは，$n^*=\frac{\omega a^2}{\pi^2}\sqrt{\rho_m h/D_m}$ で表す．

表－1には，周辺固定された傾斜機能正方形板の振動数パラメータの収束性に与える区分点の数（Mx=My）の影響が示してある．ただし，spline 次数 k-1 は 4 次であり，傾斜機能係数 p は 1 に仮定している．また，比較のために，3 次元弾性論に基づく直交多項式を変位関数に仮定した Ritz 法の値 [3)]も示してある．表－1より，幅厚比の値に関わらず，区分点の数を高めると，一定値に向う安定した収束状態が得られており，また Uymaz らの Ritz 法の値 [3)]と良く一致した結果が得られている．

表－１ 周辺固定された傾斜機能平板の振動数パラメータの収束性と精度比較: $k-1=4, a/b=1$

幅厚比	区分点の数	Modes				
a/h	Mx=My	1st	2nd	3rd	4th	5th
100	5	3.130	6.500	6.533	9.414	14.40
	9	3.125	6.370	6.370	9.389	11.44
	13	3.124	6.367	6.367	9.381	11.40
	17	3.124	6.365	6.365	9.378	11.40
	21	3.124	6.365	6.365	9.377	11.40
	3D-Ritz[3)]	3.167	–	–	–	–
10	5	2.859	5.487	5.487	7.739	9.301
	9	2.848	5.461	5.461	7.683	9.075
	13	2.845	5.450	5.450	7.661	9.047
	17	2.844	5.445	5.445	7.652	9.034
	21	2.843	5.442	5.442	7.647	9.027
	3D-Ritz[3)]	2.881	–	–	–	–

表－２は，周辺固定された傾斜機能正方形板の基本振動数パラメータの精度比較を示している．ここで，傾斜機能係数 p は 0 から 2 まで変化させている．また，式(1)の変位関数の z^3 の項を無視して誘導した 1 次せん断変形理論（Mindlin 板理論）に基づく Ritz 法を定式化し，せん断修正係数 κ を 5/6 に仮定して求めた値を並記してある．これより，p の値に関わらず，Reddy 理論の解は，Mindlin 板理論の値とほぼ同じ値を示し，また Uymaz らの Ritz 法の値 [3)]と良く一致した結果が得られている．

表－2 周辺固定された傾斜機能平板の振動数パラメータに与える傾斜機能係数pの影響と平板理論の比較

a/h	Theories	p				
		0	0.2	0.5	1	2
100	Reddy	3.642	3.456	3.276	3.124	3.018
	Mindlin	3.642	3.455	3.276	3.123	3.017
	3D-elasticity[3)]	3.695	3.503	3.321	3.167	3.058
10	Reddy	3.305	3.144	2.985	2.844	2.731
	Mindlin	3.295	3.134	2.975	2.836	2.729
	3D-elasticity[3)]	3.350	3.186	3.025	2.881	2.766

4. まとめ 得られた結果を纏めると，以下のようになる．1) 本研究で開発したspline Ritz法を用いれば，任意の境界条件を持つ傾斜機能平板の振動解析が可能であり，また精度の高い解析結果が得られる．2）傾斜機能係数 pの値を変化させれば，振動数を自由に変化させられる． ３）3 次せん断変形理論で求めた振動数パラメータの値は，1 次せん断変形理論の値と良く一致した結果を示し，また 3 次元弾性論で求めた値に近い値を示している． ４）傾斜機能による面内と面外の連成の影響は，板厚が大きくなると顕著に見られる．

参考文献1）Birman,V. and Byrd,L.W.: Modeling and analysis of functionally graded materials and structures.App. Mech. Reviews,Vol.60, pp.195216,2007. 2) 水澤他：高次せん断変形理論に基づくスプライン帯板法を用いた積層複合板の振動解析. 構造工学論文集, Vol. 40A, pp. 71−83, 1994. 3）Uymaz,B. and Aydogdu,M.: Three-dimentional vibration analyses of functionally graded plates under various boundary conditions. J. Reinforced plastics and Composites, Vol. 26, pp.1847-1863, 2007.