ハイアラーキ三次元シェル要素による厚板解析

函館工業高等専門学校 正員 ○渡辺 力
長岡技術科学大学 名誉教授 正員 林 正

1. まえがき

本研究では，種々の厚板理論を用いて定式化された曲げ要素に平面応力要素の剛性を加えた平面シェル要素と等価で，三次元体のハイアラーキ三次元シェル要素を提案する．

この要素は，ハイアラーキソリッド要素[1)]において，Mindlin や Ressner の一次せん断変形理論，Lo や Kant の三次せん断変形理論，さらに高次理論と同じ変位場を規定した要素である．これらの要素はソリッド要素であるので変位成分は3成分であるが，厚板理論と同じ変位場を用いるので，要素の総自由度数は同じ理論で定式化された平面シェル要素と同じになる．さらに，変厚板への適用が容易で，三次元体であるのでソリッド要素と結合しても中央面が結合されるというモデル化の矛盾は生じない．

以上の一次せん断変形理論型要素 (Mindlin 要素，Reissner 要素) と高次理論型要素を厚板解析に適用して精度と収束性を調べる．

2. ハイアラーキ三次元シェル要素

(1) 高次理論型要素

六面体ソリッド要素の変位関数を次のように表す．

$$
\begin{aligned}
u(\xi,\eta,\zeta) &= \sum_{m=0}^{M}\sum_{n=0}^{N}\sum_{l=0}^{L_x} N_{mnl}(\xi,\eta,\zeta)\cdot u_{mnl} \\
v(\xi,\eta,\zeta) &= \sum_{m=0}^{M}\sum_{n=0}^{N}\sum_{l=0}^{L_y} N_{mnl}(\xi,\eta,\zeta)\cdot v_{mnl} \\
w(\xi,\eta,\zeta) &= \sum_{m=0}^{M}\sum_{n=0}^{N}\sum_{l=0}^{L_z} N_{mnl}(\xi,\eta,\zeta)\cdot w_{mnl} \qquad (1)
\end{aligned}
$$

ここに，$u_{mnl}, v_{mnl}, w_{mnl}$ は一般化変位，N_{mnl} は形状関数，m, n, l は多項式の次数を表す．ξ, η の最大次数は M, N で，ζ の最大次数には u, v, w に対して L_x, L_y, L_z を用いる．L_x, L_y, L_z の採り方により，**図–1** の各種の厚板理論に対応した板厚方向座標 ζ に関する変位場を任意に規定することができる．

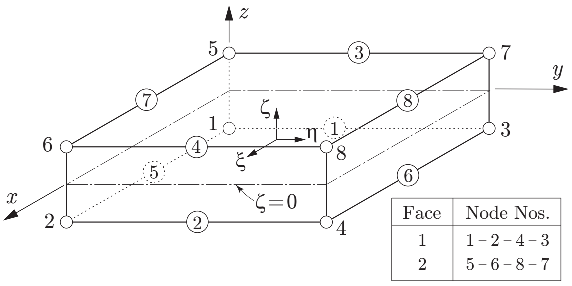
例えば，三次せん断変形理論と同じ変位場は，Lo 理論に対して式 (1) で L_x=L_y=3, L_z=2 と，Kant 理論では L_x=L_y=L_z=3 と採れば良い．これらの要素を三次せん断変形理論型要素と呼ぶことにする．

$$
\begin{aligned}
u &= u_0 + z u_1 + z^2 u_2 + z^3 u_3 + z^4 u_4 + z^5 u_5 + z^6 u_6 + \cdots \\
v &= v_0 + z v_1 + z^2 v_2 + z^3 v_3 + z^4 v_4 + z^5 v_5 + z^6 v_6 + \cdots \\
w &= w_0 + z w_1 + z^2 w_2 + z^3 w_3 + z^4 w_4 + z^5 w_5 + z^6 w_6 + \cdots
\end{aligned}
$$

Reissner Mindlin I=1　Lo I=2　Kant　I=3

(I: 松永の I 次近似式)

図–1 各種の厚板理論における変位場



図–2 一次せん断変形理論型要素

(2) 一次せん断変形理論型要素

式 (1) の変位関数では，最大次数 $L_k \geqq 1$ に採る必要があることから一次せん断変形理論の w の変位場を表現できない．よって，一次せん断変形理論型の要素では，式 (1) の変位関数に L_x=L_y=L_z=1 を用いて，Reissner 理論と Mindlin 理論を満足するように構成方程式を修正して定式化する．

一次せん断変形理論では，面外垂直ひずみ ε_z=0 となる．よって，三次元弾性理論理論の応力–ひずみ関係式において ε_z を消去する．

$$
\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D_1 & D_2 \\ D_2 & D_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \end{Bmatrix} + \frac{\nu}{(1-\nu)} \begin{Bmatrix} \sigma_z \\ \sigma_z \end{Bmatrix} \qquad (2)
$$

せん断応力とせん断ひずみの関係式には，

$$
\begin{Bmatrix} \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} G & 0 & 0 \\ 0 & G_s & 0 \\ 0 & 0 & G_s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} \qquad (3)
$$

を用いる．ここに，$G_s = kG$ であり，Reissner 理論では k=5/6 を用いる．

以上の修正により，**図–2** に示す三次元体の Mindlin 要素と Reissner 要素を定式化できる．

Key Words: ハイアラーキ三次元シェル要素，せん断変形理論，厚板解析
〒 042–8501 函館市戸倉町 14–1， TEL:0138–59–6488， FAX:0138–59–6488

表–1 周辺単純支持板のたわみと応力の誤差 (一次せん断変形理論型要素，h/b=1/10) (%)

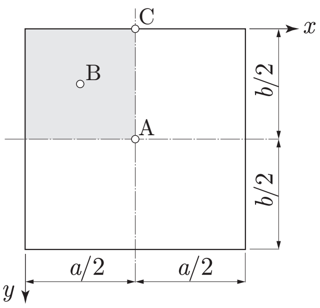
Model	M=N	Mindlin 要素				Reissner 要素				DOF
		$w^* \times 10^3$	$\sigma_x^* \times 10^2$	$\tau_{xy}^* \times 10^2$	$\tau_{yz}^* \times 10^2$	$w^* \times 10^3$	$\sigma_x^* \times 10^2$	$\tau_{xy}^* \times 10^2$	$\tau_{yz}^* \times 10^2$	
A	4	-1.3×10^{-2}	-5.6×10^{-1}	4.3×10^{-1}	5.7	-1.3×10^{-2}	-5.9×10^{-1}	4.2×10^{-1}	5.6	150
	6	1.6×10^{-4}	-6.5×10^{-3}	2.1×10^{-2}	-6.8×10^{-2}	1.1×10^{-4}	-2.3×10^{-2}	2.3×10^{-2}	-7.5×10^{-2}	294
	8	3.0×10^{-5}	7.3×10^{-5}	-1.4×10^{-4}	5.6×10^{-4}	1.9×10^{-5}	-1.1×10^{-2}	5.3×10^{-4}	-2.3×10^{-3}	486
	10	8.8×10^{-6}	-7.9×10^{-5}	-2.1×10^{-5}	1.2×10^{-3}	5.4×10^{-6}	-7.9×10^{-3}	3.3×10^{-4}	-5.9×10^{-5}	726
B	4	-1.4×10^{-4}	2.4×10^{-2}	-3.2×10^{-2}	-4.8×10^{-1}	-1.4×10^{-4}	2.3×10^{-2}	-3.2×10^{-2}	-4.8×10^{-1}	486
	6	8.8×10^{-8}	-1.1×10^{-4}	-3.4×10^{-5}	-2.7×10^{-4}	1.3×10^{-8}	-1.9×10^{-4}	-8.5×10^{-5}	-3.1×10^{-4}	1014
	8	8.7×10^{-9}	-2.2×10^{-6}	-6.4×10^{-6}	1.9×10^{-5}	-2.6×10^{-9}	-2.7×10^{-5}	1.3×10^{-6}	6.1×10^{-6}	1734
	10	1.8×10^{-9}	-1.3×10^{-7}	-3.6×10^{-8}	-8.7×10^{-7}	-8.6×10^{-10}	-4.9×10^{-6}	-3.8×10^{-6}	-2.8×10^{-6}	2646
解析解 2),3)		4.27284	−28.7318	−8.00969	10.1957	4.24127	−28.8218	−7.95919	15.2936	—
厳密解		4.24878	−29.0093	−8.04897	15.2936	4.24878	−29.0093	−8.04897	15.2936	—
備考 (観測点)		A–中央	A–上縁	B–下縁	B–中央	A–中央	A–上縁	B–下縁	B–中央	—

表–2 周辺単純支持板のたわみと応力の誤差 (三次せん断変形理論型要素，h/b=3/10) (%)

Model	M=N	Lo 型要素					Kant 型要素				
		$w^* \times 10^3$	$\sigma_x^* \times 10^2$	$\tau_{xy}^* \times 10^2$	$\tau_{yz}^* \times 10^2$	DOF	$w^* \times 10^3$	$\sigma_x^* \times 10^2$	$\tau_{xy}^* \times 10^2$	$\tau_{yz}^* \times 10^2$	DOF
A	4	-9.1×10^{-2}	1.5	3.5×10^{-1}	7.4×10^{-1}	275	-2.1×10^{-1}	-3.0×10^{-1}	3.7×10^{-1}	7.4×10^{-1}	300
	6	-6.7×10^{-4}	1.3	2.3×10^{-2}	-3.5×10^{-1}	539	-5.6×10^{-2}	-5.9×10^{-1}	3.2×10^{-2}	-3.5×10^{-1}	588
	8	1.2×10^{-3}	3.4×10^{-1}	5.0×10^{-4}	1.3×10^{-1}	891	-1.0×10^{-2}	-6.2×10^{-1}	2.8×10^{-3}	1.3×10^{-1}	972
	10	4.2×10^{-4}	6.4×10^{-2}	7.0×10^{-5}	-2.9×10^{-2}	1331	-1.2×10^{-3}	-3.2×10^{-1}	6.1×10^{-4}	-2.9×10^{-2}	1452
B	4	-1.7×10^{-3}	8.5×10^{-3}	-3.6×10^{-2}	-5.1×10^{-2}	891	-2.9×10^{-3}	-4.5×10^{-2}	-3.8×10^{-2}	-5.1×10^{-2}	972
	6	1.1×10^{-6}	-1.2×10^{-4}	-4.1×10^{-6}	-1.6×10^{-4}	1859	-3.7×10^{-5}	1.8×10^{-3}	-5.9×10^{-5}	-1.6×10^{-4}	2028
	8	4.1×10^{-7}	1.0×10^{-4}	-9.6×10^{-6}	2.6×10^{-5}	3179	4.1×10^{-7}	2.1×10^{-4}	-7.8×10^{-6}	2.6×10^{-5}	3468
	10	8.9×10^{-8}	2.3×10^{-6}	-1.6×10^{-7}	-6.2×10^{-8}	4851	1.5×10^{-7}	5.3×10^{-6}	-9.6×10^{-7}	-6.2×10^{-8}	5292
解析解		5.63157	−32.1312	−8.35699	15.3035	—	5.63112	−32.1028	−8.36843	15.3035	—
厳密解		5.63544	−31.1950	−8.36384	15.3228	—	5.63544	−31.1950	−8.36384	15.3228	—
備考 (観測点)		A–上縁	A–上縁	B–下縁	B–中央	—	A–上縁	A–上縁	B–下縁	B–中央	—

3. 数値計算例

計算モデルには，**図–3** に示す長さ a，幅 b，厚さ h の等分布荷重 q を受ける正方形板 (a/b=1) を用いる．材料定数は，弾性係数 E，ポアソン比 ν=0.3 とし，一次せん断変形理論型要素ではせん断補正係数に k=5/6 を用いる．要素分割には，平板の 1/4 領域を，要素分割をせずに 1 要素でモデル化した Model–A，2×2 に不等分割した Model–B を用いる．



図–3 計算モデル (厚板)

板厚比 h/b=1/10 の周辺単純支持板に，Mindlin 要素と Reissner 要素を用いた結果を**表–1** に示す．表は，Model–A, B の要素分割に対して，M,N=4∼10 次式を用いて計算した A 点 (x=a/2, y=b/2) の中央面のたわみ w，上縁の直応力 σ_x と，B 点 (x=a/4, y=b/4) の下縁の面内せん断応力 τ_{xy}，中央面の面外せん断応力 τ_{yz} のそれぞれの理論による解析解に対する誤差 (%) を示したものである．

表より，収束性は良好で，要素分割をしない Model–A でも高精度の値が得られており，2×2 に分割した Model–B ではさらに高精度の値が求められている．M=N=10 次式を用いた Mindlin 要素では w で 10 桁，応力で 8∼9 桁が Mindlin 理論[2] による解析解に一致しており，Reissner 要素でも w で 11 桁，応力で 7 桁が Reissner 理論[3] による解析解に一致する値が得られている．

板厚比 h/b=3/10 の周辺単純支持板に，Lo 型要素と Kant 型要素を用いた結果を**表–2** に示す．高次理論型要素でも，M=N=10 次式を用いた Lo 型要素では，w で 9 桁，応力で 7∼9 桁が Lo 理論による解析解に一致しており，Kant 型要素でも w で 8 桁，応力で 7∼9 桁が Kant 理論による解析解に一致している．

以上のように，各種の厚板理論と同じ変位場を規定した本要素では，それぞれの理論解に対して極めて高精度な解が得られる．

参考文献

1) 林　正：ハイアラーキ有限要素法 －大型要素による高精度解析法－, 技報堂出版, 2006.
2) Mindlin, R.D. : Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates, *J. App. Mech.*, Vol.73, pp.31–38, 1951.
3) Reissner, E. : The effect transverse shear deformation on the bending of elastic plates, *J. App. Mech.*, Vol.67, pp.A-69–A-77, 1945.