

# 密度の摂動を伴う半無限弾性波動場の散乱波の性状について

東京理科大学 学生会員 倉浪 晃一  
 東京理科大学 正会員 東平 光生

## 1 序論

近年著者らの研究グループは、一連の研究で領域積分方程式を用いた弾性波動場の散乱解析手法を展開してきた<sup>1)2)</sup>。特に、半無限弾性波動場の解析においては、半無限弾性波動場の固有値問題から得られる一般化 Fourier 変換と逆変換を Krylov 部分空間反復解法に組み入れることで、半無限弾性波動場の境界条件を考慮するとともに、係数行列の導出を不要としている。しかしながら、これまでの散乱解析では媒質の Lamé 定数のみが摂動する場を想定しており、媒質の質量密度が摂動する場合の解析については検討を加えてこなかった。こうした背景のもと、媒質の質量密度が摂動したとき、散乱波がどのような性状を示すか考察を行う。

## 2 解析手法

Lamé 定数のみならず、質量密度も摂動する半無限弾性波動場の散乱解析のための領域積分方程式は、次式で表される。

$$v_i(x) = - \int_{\mathbb{R}_+^3} G_{ij}(x, y) N_{jk} f_k(y) dy - \int_{\mathbb{R}_+^3} G_{ij}(x, y) N_{jk} v_k(y) dy \quad (1)$$

ここで、 $f_i$  は入射波動場、 $v_i$  は散乱波動場、 $G_{ij}(x, y)$  は半無限均質波動場の Green 関数、 $N_{jk}$  は媒質の摂動を記述する演算子で次式で示される。

$$N_{ij} = -(\tilde{\lambda} + \tilde{\mu})\partial_i\partial_j - \delta_{ij}\tilde{\mu}\partial_k^2 - \partial_i\tilde{\lambda} - \delta_{ij}(\partial_k\tilde{\mu})\partial_k - (\partial_j\tilde{\mu})\partial_i - \delta_{ij}\tilde{\rho}\omega^2 \quad (2)$$

ただし、 $\tilde{\lambda}, \tilde{\mu}$  はバックグラウンドの Lamé 定数からの摂動、 $\tilde{\rho}$  は同様に質量密度の摂動を示す。式 (1) に一般化 Fourier 変換を施すことで次式を得る。

$$\hat{v}_i(\xi) = -\hat{h}(\xi)\mathcal{U}_{ij}N_{jk}\mathcal{U}_{kl}^{-1}\hat{f}_l(\xi) - \hat{h}(\xi)\mathcal{U}_{ij}N_{jk}\mathcal{U}_{kl}^{-1}\hat{v}_l(\xi) \quad (3)$$

ここに、 $\xi$  は波数空間上の点、 $\mathcal{U}_{ij}$  および  $\mathcal{U}_{kl}^{-1}$  は一般化フーリエ変換および逆変換の演算子、 $\hat{v}_i$  は散乱波動場の一般化 Fourier 変換、 $\hat{h}$  は次式で示される Green 関数の一般化フーリエ変換に付随して現れる関数である。

$$\hat{h}(\xi) = \frac{1}{\mu_0\xi^2 - \rho_0\omega^2 + i\varepsilon} \quad (4)$$

ただし、 $\lambda_0, \mu_0, \rho_0$  はバックグラウンドの Lamé 定数ならびに質量密度である。また  $\omega$  は角振動数、 $\varepsilon$  は無限小の正数である。式 (3) の一般化フーリエ変換ならびに逆変換を離散化し、Krylov 部分空間反復解法<sup>3)</sup>を適用することで、散乱解析が行われることになる。

## 3 数値計算例

数値計算は Lamé 定数の摂動のみを考慮した場合 (case-1)、質量密度の摂動のみを考慮した場合 (case-2)、Lamé 定数の摂動と質量密度の両者の摂動を同時に考える場合 (case-3) の合計 3 ケースについて行う。ただし、Lamé 定数および質量密度の摂動は、図-1 および図-2 に示すような球対称モデルとする。図より明らかなように、Lamé 定数の摂動は最大で 0.1 GPa、質量密度の摂動は最大 0.1 g/cm<sup>3</sup> とする。またその領域はおよそ半径 3 km ほどまで広がっている。

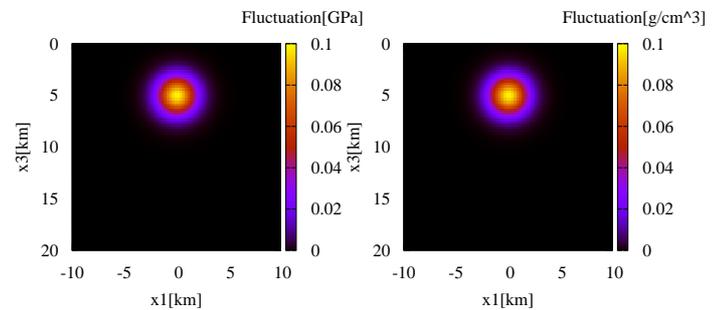


図 1: Lamé 定数のゆらぎ 図 2: 質量密度のゆらぎ

数値計算において、入射波動場は地表面点加振によって生成されるとする。ただし、加振力の方向は鉛直下方向とし、加振力の大きさは  $1.0 \times 10^{10}$  N とする。バックグラウンドの Lamé 定数および質量密度を  $\lambda_0 = 4.0$  GPa、 $\mu_0 = 2.0$  GPa、 $\rho_0 = 2.0$  g/cm<sup>3</sup> とし、加振振動数を 1 Hz とした場合の鉛直断面における入射波動場の振幅を図-3 に示す。また、それぞれの解析ケースにおける散乱波の鉛直断面における振幅を図-4 から図-6 に示す。

図-3 の入射波動場によると、変位振幅の高い領域は地表面に沿った表面波の部分と地中方向に進行する実体波の部分に分かれている。特に実体波に関しては、地下方向に

キーワード：散乱解析, Green 関数, 領域積分方程式, 一般化 Fourier 変換, Krylov 部分空間反復解法

〒 278-8510 千葉県野田市山崎 2641 東京理科大学理工学部土木工学科 応用力学研究室 TEL:0471-24-1501(ex 4063)

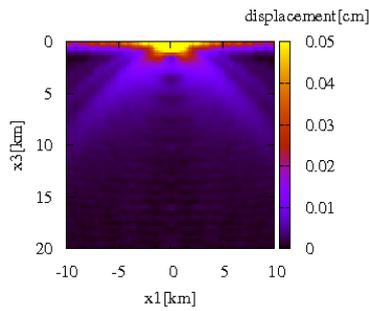


図 3: 入射波 [cm]

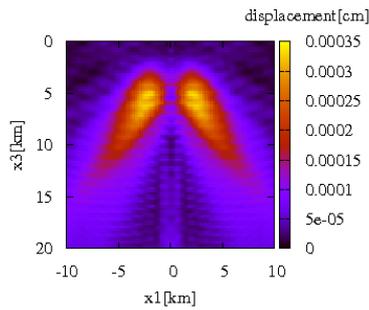


図 4: 散乱波:case-1[cm]

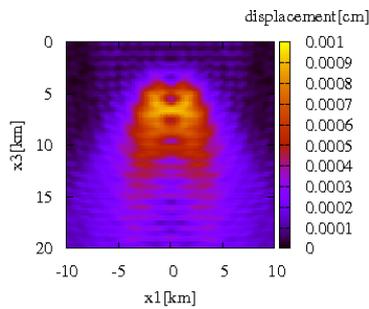


図 5: 散乱波:case-2[cm]

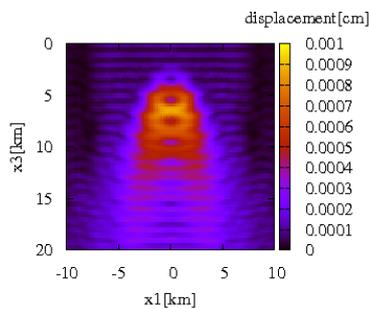


図 6: 散乱波:case-3[cm]

強い指向性を持ち、斜め方向に二手に分かれて伝播することが特徴である。図-4 の case-1 の散乱解析結果によると、Lamé 定数の摂動領域は媒質の剛性が高い領域であり、散乱波の振幅もそこで低くなっていることが分かる。この意味で、散乱波の振幅の高い領域は、剛性の高い領域を避けるように生じていると見ることもできる。一方、質量密度の摂動のみを考慮した case-2 の解析では、質量密度の摂動領域での波動の伝播速度の低下によって、散乱波の振幅が、今度は媒質の摂動領域付近で高くなっている。また、Lamé 定数と質量密度両方の摂動を考慮した case-3 の解析結果は、case-2 の結果に比べ、散乱波の振幅が高い領域が狭くなっている。この理由は、媒質の摂動に伴う波動の伝播速度の変化が、case-2 に比べ結果的に小さくなっているためと考えられる。なお、質量密度の摂動を考慮した散乱波の解析結果では、鉛直下方向に、振幅が高い領域と低い領域が交互に現れている。この原因として、当初離散化 grid 間隔が広すぎることによるものと考えていた。しかしながら、grid 間隔を狭めてもこの現象は再現され、この原因の究明については、今後の検討が待たれている。

#### 4 結論

本論文では、領域積分方程式を用いて半無限弾性波動場におけるいくつかの散乱解析結果を示した。特に、ここでは Lamé 定数の摂動の効果と質量密度の摂動の効果について考察している。散乱波の振幅の高い領域は、入射波動場の性質と媒質の波動伝播速度の変化の効果で概ね説明できることを示した。しかしながら、質量密度の摂動を考慮した解析では、鉛直下方向に振幅の高い領域と低い領域が交互に現れる現象も見られ、これについては今後詳しく検討する必要がある。

#### 5 参考文献

- 1) Touhei Terumi: Generalized Fourier transform and its application to the volume integral equation for elastic wave propagation in a half space, International Journal of Solids and Structures Vol 46, 2009.
- 2) Touhei Terumi, Taku Kiuchi, Kentaro Iwasaki: A fast volume integral equation method for the direct/inverse problem in elastic wave scattering phenomena, International Journal of Solids and Structures Vol 46, 2009.
- 3) 藤野清次, 張紹良: 反復法の数理, 応用数値計算ライブラリー, 朝倉書店, 1996.