

時間領域境界要素法による多群中性子拡散解析

福井大学大学院 学生会員 ○ 山口 潤
福井大学大学院 正 会 員 福井 卓雄

1 はじめに

本報告では、多群中性子拡散問題の演算子積分時間領域境界要素法において必要となる、Laplace 変換域における基本解の一般的な導出法を提案する。

これまでの研究において、多群中性子拡散問題の時間領域境界要素法を、Lubich の演算子積分法を適用して定式化し、Hölmänder の方法を用いた Laplace 変換域での基本解の導出法を提案し、成果を報告してきた [1]。しかし、この方法を用いる場合、多群拡散方程式の作用素の行列式および余因子行列を求め、変形していく必要があり、群分割数が増えると非常な困難を伴う。

本報告においては、Laplace 変換域における基本解が、係数行列の固有値を波数とする 1 群拡散方程式の基本解の線形結合で表現されることに着目し、固有値 (波数) に対応する (左右) 固有ベクトルを利用して基本解を表現する方法について述べ、群分割数に制約されない手法を提案する。

2 境界積分方程式

i 群の中性子束を ϕ_i とするとき、 i 群の群拡散方程式は

$$(\delta_{ij}\nabla^2 - A_{ij} + B_{ij})\phi_j + s_i = \frac{1}{C_{ij}}\frac{\partial\phi_j}{\partial t} \quad (1)$$

のように表現することができる [4, 5]。ただし、群は中性子エネルギーの大きい方から番号付けされている。

定数 A_{ij} は群からの中性子の減少を表す対角行列であり、定数 B_{ij} は群間の相互作用に関する係数、定数 C_{ij} は群中性子の拡散を表す対角行列である [1]。また、定数 s_i は中性子源の i 群への寄与分である。

初期条件として、 $\phi_i(\mathbf{x}, 0) = \phi_i^0(\mathbf{x})$ 、境界条件として境界 ∂B_1 において $\phi_i(\mathbf{x}, t) = \hat{\phi}_i^0(\mathbf{x}, t)$ 、および、境界 ∂B_2 において群中性子流密度 $\partial\phi_i/\partial n(\mathbf{x}, t) = \hat{J}_i(\mathbf{x})$ ($\partial B = \partial B_1 + \partial B_2$) が与えられ、方程式 (1) の基本解 $G_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)$ の存在を仮定すれば、方程式 (1) に対する Green 公式により

$$\begin{aligned} C(x)\phi_i(\mathbf{x}, t) &= \int_{\partial B} G_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) * s_j(\mathbf{y}, t) dV_y \\ &+ C_{jk} \int_B G_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) \phi_k(\mathbf{y}, 0) dV_y \\ &+ \int_{\partial B} G_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) * \frac{\partial\phi_j(\mathbf{y}, t)}{\partial n} dS_y \\ &- \int_{\partial B} S_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) * \phi_j(\mathbf{y}, t) dS_y \end{aligned} \quad (2)$$

により境界積分方程式を表すことができる。ここに、 $f * g$ は繰り込み積、 $C(x)$ は自由項であり、 x が領域内部のとき 1、なめらかな境界上にあるとき $1/2$ 、領域外部にあるとき 0 の値をとる。また、添字 y は y についての積分であることを示す。

3 演算子積分時間領域境界要素法

Lubich による演算子積分法 [3] を積分方程式 (2) に適用することにより、繰り込み積近似と時間領域の離散化が行われ、境界要素および領域要素について近似を導入することにより、境界積分方程式 (2) は

$$\begin{aligned} C(x)\phi_i(\mathbf{x}, n\Delta t) &\simeq \sum_J \sum_{k=1}^n \bar{A}_{ij,J}^{n-k}(\mathbf{x}) s_{j,J}(k\Delta t) \\ &+ C_{jk} \sum_J \bar{A}_{ij,J}^n(\mathbf{x}) \phi_{k,J}(0) + \sum_J \sum_{k=1}^n A_{ij,J}^{n-k}(\mathbf{x}) J_{j,J}(k\Delta t) \\ &- \sum_J \sum_{k=1}^n B_{ij,J}^{n-k}(\mathbf{x}) \phi_{j,J}(k\Delta t) \end{aligned} \quad (3)$$

となる。影響関数 $A_{ij,J}^m(\mathbf{x})$, $B_{ij,J}^m(\mathbf{x})$ および $\bar{A}_{ij,J}^m(\mathbf{x})$ は、もっとも単純な一定要素の場合には次のようである。

$$\begin{aligned} A_{ij,J}^m(\mathbf{x}) &= \frac{\rho^{-m}}{L} \sum_{l=0}^{L-1} \left[\int_{E_J} \hat{G}_{ij} \left(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \frac{\delta(\zeta_l)}{\Delta t} \right) dS_y \right] e^{-2\pi i \frac{ml}{L}} \\ B_{ij,J}^m(\mathbf{x}) &= \frac{\rho^{-m}}{L} \sum_{l=0}^{L-1} \left[\int_{E_J} \hat{S}_{ij} \left(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \frac{\delta(\zeta_l)}{\Delta t} \right) dS_y \right] e^{-2\pi i \frac{ml}{L}} \\ \bar{A}_{ij,J}^m(\mathbf{x}) &= \frac{\rho^{-m}}{L} \sum_{l=0}^{L-1} \left[\int_{\bar{E}_J} \hat{G}_{ij} \left(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \frac{\delta(\zeta_l)}{\Delta t} \right) dV_y \right] e^{-2\pi i \frac{ml}{L}} \end{aligned}$$

ここに、 $\delta(\zeta) = \sum_{j=0}^{\infty} \delta_j \zeta^j$ は差分法 (線形多段階法) における生成多項式の商である。また、複素数 ζ_l は半径 $\rho < 1$ の円周上の点で、 $\zeta_l = \rho e^{2\pi i l/L}$ である。 ρ は要求される精度により決定される。

4 Laplace 像空間における基本解

境界積分方程式 (3) は、基本解 G_{ij} を求めなくても、基本解の Laplace 変換 $\hat{G}_{ij}$ を求めることで解くことができる。

群拡散方程式 (1) の Laplace 変換は

$$L_{ij}\hat{\phi}_j = (\delta_{ij}\nabla^2 - \bar{A}_{ij} + B_{ij})\hat{\phi}_j = 0 \quad (4)$$

と書くことができる。係数行列 $\bar{A}_{ij} = A_{ij} + p/C_{ij}$ は、対角行列であるが、Laplace 変換パラメータ p を含んでいるため複素行列となる。また、中性子源の項は省略した。

時間項を含まない方程式 (4) の基本解は

$$L_{ij}\hat{G}_{jk}(x) = -\delta_{ik}\delta(x) \quad (5)$$

の解として与えられる。この Fourier 変換は

$$\tilde{L}_{ij}\tilde{G}_{jk}(\xi) = (-\delta_{ij}\xi_k\xi_k - \bar{A}_{ij} + B_{ij})\tilde{G}_{jk}(\xi) = -\delta_{ik}$$

となる。この式を簡単のために行列形式で

$$(M - \lambda I)\tilde{G} = -I \quad (6)$$

と表現する。ここで、 $M = -\bar{A} + B$, $\lambda = \xi \cdot \xi$ である。

行列 M の固有方程式は

$$|M - \lambda I| = 0 \quad (7)$$

である。この方程式は、 N 個の根 (固有値) $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N$ を持ち、それぞれの固有値に対して、同次方程式

$$M\mathbf{p}_i = \lambda_i\mathbf{p}_i, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (8)$$

により、右固有ベクトル $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_N$ を得ることができる。ここで、これらの固有ベクトルを列ベクトルとする行列 $P = \{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_N\}$ を導入すると、(8) により

$$MP = \text{diag}(\lambda_*)P \quad (9)$$

の関係がある。ここに、 $\text{diag}(\lambda_*)$ は固有値 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N$ による対角行列を表す。(9) により

$$P^{-1}MP = \text{diag}(\lambda_*) \quad (10)$$

となる。すなわち、行列 P は行列 M を変換して対角行列にする。方程式 (6) に P を作用させ、変形していくことにより、Fourier 変換域での基本解は

$$\tilde{G} = -P\text{diag}\left(\frac{1}{\lambda_* - \lambda}\right)P^{-1} = -P\text{diag}\left(\frac{1}{\kappa_*^2 - \xi_i\xi_i}\right)P^{-1}$$

により求めることができる。この式の右辺は、 $1/(\lambda_i - \lambda)$ ($i = 1, 2, \dots, N$) の線形結合となっている。上式を逆 Fourier 変換することにより、Laplace 変換域での基本解は

$$\hat{G} = P\text{diag}[g(\kappa_*|x - y|)]P^{-1} \quad (11)$$

となる。ここに、 $g(\kappa_i|x - y|)$ は 1 群拡散方程式の Laplace 変換域での基本解である。

5 数値解析例

本手法の妥当性を確認するために数値解析を行った。従来の方法 [1] による解析結果と比較を行い、本手法による数値解が正解を近似するものであることを確認した。

解析対象領域および境界条件を図-1 に示す。領域は 1 辺の長さが 1 の正方形領域とし、図に示すように境界条件を与えた。解析は 3 群拡散問題で行い、中性子源 $s_1 = 1$ を全領域で与えている。

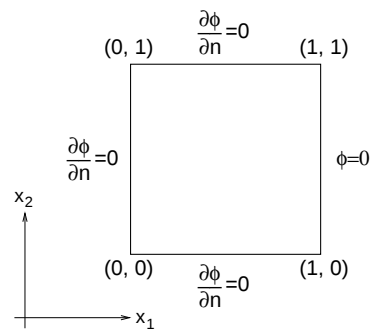


図-1 解析領域

	1	2	3
A	3.2	1.3	1.8
B	0.0	1.2	0.8
	1.4	0.0	0.5
C	2.2	1.3	0.0
	1.0	1.5	1.0

図-2 3 群拡散解析の材料定数

初期値はすべての群において $\phi_i = 0$ である。解析に用いた定数を図-2 に示す。境界の各辺は 10 分割して要素とし、全部で 40 要素とした。時間増分は単位時間 T に対して、 $\Delta t = T/64$ とした。解析期間は $(0, 4T]$ である。単位時間は、拡散に関する係数 C_i の最小値によって決定している。解析結果を図-3 に示す。図中では、従来の境界要素法による結果を実線、本手法による結果をマーカーでプロットして表している。解析結果は両手法で一致している。

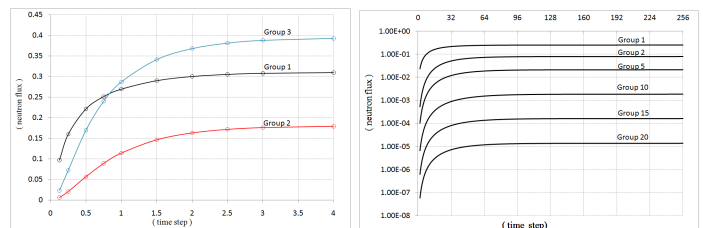


図-3 3 群拡散解析における従来の BEM と本手法の解析結果の比較

さらに群分割数を増やし、20 群拡散解析を行った例を示す。解析領域、境界条件は先程の解析と同様とし、材料定数は適当な値を与えて解析を行っている。時間増分は単位時間 T に対して、 $\Delta t = T/64$ とし、解析期間は $(0, 4T]$ である。

代表群の点 (0.0, 0.45) 点における中性子束の時間変化を図-4 に示す。群の数を増やした際にも問題なく解析を行うことができおり、本手法の妥当性が確認できた。

参考文献

- [1] 山口潤, 福井卓雄: 低次群中性子拡散方程式の時間領域境界要素法, 応用力学論文集, Vol.12, pp.179-186, 2009.
- [2] 福井卓雄: 演算子積分法による中性子拡散問題の時間領域境界要素法, 計算力学講演会論文集, 12, pp.861-864, 2007.
- [3] Lubich, C.: Convolution quadrature and discretized operational calculus I and II, *Numer. Math.*, **52**, pp. 129-145, pp. 413-425, 1988.
- [4] Lamarsh, J.R. and A.J. Baratta, *Introduction to Nuclear Engineering*, 3rd ed., Pearson Education Inc., 2001.
- [5] Stacey, W.M., *Nuclear Reactor Physics*, 2nd ed., Wiley-VHC, 2007.